

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»**

Савинова Елена Владимировна

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОЛЕЙ
В СПЛОШНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНАХ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твёрдого тела

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата технических наук

**Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Шляхин Дмитрий Аверкиевич**

Самара – 2025

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	13
1.1. Теоретические основы термоупругости, электроупругости и термоэлектроупругости	13
1.2. Обзор существующих преобразователей	30
ГЛАВА 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ЖЁСТКОЗАКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ	35
2.1. Постановка исследуемой задачи	37
2.2. Решение задачи теплопроводности.....	39
2.3. Решение связанной задачи электроупругости	41
2.4. Численный анализ результатов исследуемой задачи	50
ГЛАВА 3. СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ЖЁСТКОЗАКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ.....	62
3.1. Постановка исследуемой задачи	62
3.2. Построение общего решения задачи.....	64
3.3. Численный анализ результатов исследуемой задачи	75
ГЛАВА 4. СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛОЙ СПЛОШНОЙ	

ОДНОСЛОЙНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ	84
4.1. Постановка исследуемой задачи	84
4.2. Построение общего решения задачи.....	85
4.3. Численный анализ результатов исследуемой задачи	91
4.4. Анализ результатов расчётов, полученных аналитическим и численным методами.....	96
ГЛАВА 5. СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОЙ КРУГЛОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ	105
5.1. Постановка исследуемой задачи	106
5.2. Построение общего решения задачи.....	109
5.3. Численный анализ результатов исследуемой задачи	119
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130
ПЕРЕЧЕНЬ ПРИНЯТЫХ В РАБОТЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	132
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	134
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	158
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	163
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	169

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В современном приборостроении широко применяют тепловые пьезокерамические устройства различного назначения. Их работа базируется на уникальном явлении, происходящем в пьезокерамическом материале, а именно взаимосвязанности температурных, электрических и упругих полей. Под воздействием неравномерных нестационарных тепловых деформаций наблюдается прямой пьезоэффект, при котором происходит генерация электрического заряда на поверхности рассматриваемого элемента.

Для описания работы пьезокерамических преобразователей и повышения их функциональных возможностей в последнее время получило развитие новое научное направление – термоэлектростроупругость. Анализ динамических термоэлектромеханических процессов в современных элементах и конструкциях с достаточной степенью точности удаётся осуществить только с помощью аналитических решений соответствующих задач. При этом сложность исследований заключается в том, что математическая формулировка данной теории включает связанные уравнения, которые содержат несамосопряжённый дифференциальный оператор. В связи с этим в большинстве разработок используются упрощённые модели, например, построение задач в несвязанной постановке или применение элементов с вырожденной геометрией, что не позволяет в полной мере оценить взаимосвязь нестационарных полей различной физической природы.

Сложность построения решений многократно возрастает при переходе от однослойных к многослойным элементам. Взаимодействие слоёв в конструкции порождает сложные градиенты полей, которые трудно описать с помощью упрощённых моделей.

Оценка работы и прогнозирование периода эксплуатации однослойных и многослойных элементов, выполненных из пьезокерамического материала и

работающих под действием температурных нагрузок, является затруднительной ввиду отсутствия алгоритмов учёта взаимосвязи возникающих в материале полей.

На сегодняшний день одной из ключевых задач современной механики деформируемого твёрдого тела является разработка эффективных методов нестационарного расчёта упругих элементов с учётом связанности термоэлектроупругих полей, что позволяет получить глубокое понимание физических процессов и установить общие закономерности поведения электроупругих систем.

Степень разработанности темы диссертации. Основой для создания современной теории термоэлектроупругости послужили фундаментальные работы выдающихся учёных. К ним относятся труды В. Фойгта и У. Мэзона в области пьезоэлектричества, работы Ю. В. Новожилова и В. З. Партон, В.Т. Гринченко и А.Ф. Улитко, связанные с исследованием деформирования твёрдого упругого и электроупругого тел, а также публикации в области теплопроводности Ф. Неймана, Дж. Дюгамеля, Г. Лорда, Ю. Шульмана, А. Грина и П. Нахди. Все эти работы заложили базу для анализа взаимодействия механических, тепловых и электрических процессов. Первые попытки сформулировать общую теорию связанности этих процессов в конструкциях конечных размеров принадлежат Р. Д. Миндлину и В. Новацкому. Их работы ознаменовали новый этап в развитии данной области, предоставив основу для создания более сложных и точных моделей.

К числу учёных, внёсших значительный вклад в решение прикладных задач термоэлектроупругости, относятся Ватульян А. О., Нестеров С. А., Паньков А. А., Калоеров С. А., Белоконь А. В., Наседкин А. В., Соловьев А. Н., Qin H. Q., Куликов Г.М., Xiang H. J., Shi Z. F., Alshaikh F., Bassiouny E., Huang J., Chen W., Nassar M. E., Shioya T., Wu X.-H., Shen Y.-P., Zhong X., Zhang K., Varelis D., Saravanos D. A., Lee H. J., Branco P. J. C., Dente J. A., Nourmohammadi H., Behjat B. и другие. Работы перечисленных авторов сосредоточены на разработке методов и алгоритмов расчёта, предназначенных для решения конкретных инженерных задач, включая моделирование работы сложных электромеханических систем.

Целью диссертационного исследования является разработка нового теоретического подхода к решению проблемы расчёта круглой пьезокерамической пластины в трёхмерной постановке, с учётом связанности термоэлектроупругих полей в случае действия внешней нестационарной осесимметричной температурной «нагрузки», а также проведение качественного и количественного анализа нестационарных процессов в исследуемых однослойных и многослойных электроупругих системах.

В ходе диссертационной работы для реализации поставленной цели исследования были сформулированы и построены новые решения начально – краевых задач в связанной и несвязанной постановке применительно к круглым сплошным пластинам из пьезокерамического материала.

Методы исследования. При решении соответствующих линейных краевых задач применяются конечные интегральные преобразования, которые являются наиболее общей формой метода разделения переменных и позволяют получить новые аналитические замкнутые решения. Полученные расчётные соотношения реализованы с помощью программного комплекса в системе автоматизации математических расчётов Mathcad-15.0.

Научная новизна диссертационной работы заключается в развитии теоретических основ нестационарного расчёта сплошной круглой электроупругой пластины, выполненной полностью из пьезокерамического материала (однослойной) и содержащей в себе пьезокерамический слой (многослойной), с учётом связанности механических, температурных и электрических полей. Полученные расчётные соотношения позволяют описать работу рассматриваемых элементов и уточнить их конструктивное решение при проектировании пьезокерамических тепловых преобразователей различного назначения.

В работе получены следующие новые научные результаты, связанные с решением задач сплошных круглых пластин при использовании классической теории термоэлектроупругости для элементов, выполненных полностью, либо с применением пьезокерамических материалов:

1. Разработан алгоритм, который позволяет построить инновационное замкнутое решение динамической осесимметричной задачи в несвязанной постановке для анизотропного аксиально поляризованного жёсткозакрепленного элемента, при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го рода.

2. Для различных способов закрепления (шарнирном и жёстком) и удовлетворения граничных условий теплопроводности первого и третьего рода построены новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач применительно к анизотропным однородным сплошным электроупругим системам (без учёта инерционных характеристик).

3. Для круглого шарнирно закреплённого многослойного элемента, состоящего из упругих и электроупругих слоев, разработан алгоритм связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости.

4. Численные результаты расчёта термоэлектроупругих процессов в исследуемых элементах используются для проведения анализа связанности температурных, электрических и упругих полей.

Теоретическая значимость работы определяется возможностью описания и анализа связанных термоэлектроупругих полей, возникающих в круглых сплошных пластинах при различном закреплении, выполненных из пьезокерамических материалов, либо содержащих один из таких слоёв, в случае неравномерного осесимметричного нестационарного температурного воздействия. Результаты научного исследования позволяют установить зависимость между внешним тепловым воздействием и электрическим импульсом.

Полученные результаты существенно повышают точность инженерных расчётов, что, несомненно, будет способствовать оптимизации параметров пьезокерамических устройств, направленных на их надёжность и эффективность.

Практическая значимость работы связана с разработкой программного комплекса, созданного на основе полученных аналитических решений, который является удобным и быстрым инструментом для проведения расчётов, что будет способствовать сокращению затраченного времени и ресурсов, необходимых для проектирования измерительных и контрольных устройств.

Полученные расчётные математические модели, реализованные в автоматизированном программном обеспечении, используются при выполнении трудоёмких расчётов проектными структурами ООО «СМР-Проект» (проектная марка разрабатываемого опытного образца датчика температуры ДТ-ПЗ-11.2) и при решении конкретных инженерных задач в ООО «Энергоресурс», ООО «СЛЭНАКС». Кроме того, полученные результаты диссертационной работы применяются при подготовке магистров по направлению подготовки «Строительство» профиля «Теория сооружений» Самарского государственного технического университета, а также в рамках внутреннего технического обучения специалистов по направлению проектирования систем контрольно-измерительных приборов и автоматики ООО «Волжский научно-исследовательский и проектный институт топливно-энергетического комплекса (Волга НИПИТЭК)».

Результаты внедрения проведённого исследования подтверждены актами организаций, представленными в приложении 1.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглой пьезокерамической пластины при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го рода.
2. Новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач для круглой пьезокерамической пластины при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода без учёта их инерционных характеристик.
3. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглой многослойной пластины без учёта сил инерции.
4. Анализ численных результатов расчёта термоэлектроупругих процессов в круглой однослойной и многослойной пластинах.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью, в рамках сформулированных допущений математической постановки и методами решения рассматриваемых нестационарных задач термоэлектроупругости,

совпадением в частных случаях представленных решений с известными численными результатами, а также с физической картиной исследуемых процессов.

Апробация работы. Полученные в диссертационной работе результаты были представлены и обсуждены на:

- XIII Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки и практики» (Уфа, 2023 г.);
- 79 – 82-й Всероссийских научно – технических конференциях «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре» (ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», Самара, 2022 – 2025 гг.);
- Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», Воронеж, 2022, 2024 гг.);
- XII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», Самара, 2024 г.);
- IX Всероссийской научно-технической конференции памяти Т. А. Исмаилова «Состояние и перспективы развития термоэлектрического приборостроения» (ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет», Махачкала, 2024 г.);
- XX Всероссийской научно-технической конференции «Приборостроение в XXI веке. Интеграция науки, образования и производства» (ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова», Ижевск, 2024 г.).

В полном объеме диссертационная работа была представлена на расширенном семинаре кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» (зав. кафедрой д.т.н., проф. Д. А. Шляхин), на семинаре кафедры «Прикладная математика и информатика» (зав. кафедрой д. ф. - м. н., проф. В. П. Радченко) Самарского государственного технического университета, а также на семинаре кафедры «Математическое моделирование в механике» (зав.

кафедрой д.ф. – м.н., Л. В. Степанова) Самарского национального исследовательского университета имени академика С. П. Королёва.

Публикации. Основные положения диссертационной работы отражены в 13 изданиях, среди которых 4 статьи в журналах, включённых в перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией России для публикации научных результатов на соискание учёной степени кандидата наук.

Личный вклад автора. Постановка задач, разработка математических моделей, основные научные результаты и рекомендации, содержащиеся в диссертационной работе и публикациях выполнены и получены автором диссертации самостоятельно и под непосредственным руководством научного руководителя.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка используемой литературы и трёх приложений. Общий объём работы 174 страницы, который включает 86 иллюстраций, одну таблицу. Список литературы содержит 223 источника.

В первой главе диссертации представлен анализ существующих работ, отражающих разработку теории и путей решения начально – краевых задач термоупругости, электроупругости и термоэлектроупругости. Проведённая работа с печатными и электронными источниками и изданиями позволила сделать вывод о том, что рассматриваемые задачи и поставленные цели в диссертационной работе являются актуальными в настоящее время.

Во второй главе для круглой сплошной однослойной пластины с жёстким закреплением цилиндрической поверхности исследуется осесимметричная задача в динамической постановке для случая действия нестационарной нагрузки. Нагрузка на лицевых сплошных поверхностях пластины задаётся в виде функции изменения температуры (учитывается граничное условие теплопроводности 1-го рода). Полученные в ходе исследования задачи расчётные соотношения позволяют определить скорость изменения прикладываемой нагрузки к круглой пластине, при

которой в расчётах возникает необходимость учитывать инерционные свойства упругой системы, обладающей различной толщиной.

В третьей главе исследуется задача, граничными условиями которой задаётся жёсткое закрепление круглой сплошной пластины, выполненной из пьезокерамического материала. Пластина принимается однослойной. Алгоритм задачи термоэлектроупругости построен с учётом связанности механических, электрических и температурных полей. Полученные расчётные соотношения позволяют провести точную оценку влияния нестационарного температурного поля на напряжённо-деформированное состояние, а также определить оптимальные размеры электродного покрытия, позволяющего наиболее эффективно измерить электрический импульс в виде разности потенциалов.

В четвёртой главе рассматривается задача термоэлектроупругости с учётом связанности механических, электрических и температурных полей для круглой сплошной однослойной пьезокерамической шарнирно закреплённой аксиально поляризованной пластины. Результаты исследования показывают, что электроупругая система с большей степенью свободы, по сравнению с задачей, изложенной в главе 3, позволяет получить более высокий электрический импульс на рассматриваемой поверхности. Приводится сравнение полученных аналитических результатов расчётов с численными результатами, которые также были получены в ходе проведения исследования с помощью программного комплекса.

В пятой главе исследуется задача термоэлектроупругости с учётом связанности механических, электрических и температурных полей для круглой многослойной шарнирно закреплённой пластины, содержащей пьезокерамический средний слой, без учёта сил инерции. Проводится оценка взаимного влияния толщин слоёв элемента, а также скорости изменения температурной нагрузки на напряжённо-деформируемое состояние рассматриваемого трёхслойного элемента.

В заключении сформулированы и изложены основные выводы диссертационной работы, полученные в ходе проведения научных исследований.

Акты внедрения результатов научных исследований, полученных во время работы над диссертацией, представлены в приложении 1 данной диссертационной работы.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. Теоретические основы термоупругости, электроупругости и термоэлектроупругости

Благодаря уникальным физико-механическим характеристикам пьезокерамические соединения находят применение в различных измерительных приборах, электронных и микроэлектронных устройствах [3, 6, 14, 21, 26, 29, 30, 81, 108, 198, 219]. Наблюдающиеся преимущества пьезокерамики с наведённой поляризацией [166, 203, 216, 217], по сравнению с другими материалами, повлияли на изучение процессов внутри электроупругого тела и исследование его уникальных свойств, к которым относится способность преобразовывать механическую энергию в электрическую и наоборот, а также генерировать электрический потенциал в случаях температурного воздействия [214, 215]. Для понимания и математического изложения происходящих процессов потребовалось объединение знаний различных областей науки, вследствие чего возникло новое научное направление – термоэлектроупругость, в основу которого положены основные принципы и законы механики деформируемого твёрдого тела, теплопроводности, электродинамики. Уравнения притока тепла [79], уравнения динамики сплошной среды и уравнения Максвелла в квазистатическом приближении впервые были объединены в уравнения связанной термоэлектроупругости в работе R. D. Mindlina [186]. В дальнейшее развитие этого направления значительный вклад внес В. Новацкий, доказав фундаментальную теорему о едином подходе при решении уравнений, описывающих поведение материалов, работающих одновременно под действием механических, электрических и тепловых нагрузок. Теорема позволяет обосновывать получаемые результаты задач термоэлектроупругости, подтверждая, что для поставленной задачи существует единственное решение [194]. Кроме теоремы единственности, В. Новацкому удалось сформулировать для термоэлектроупругих

систем обобщенный принцип Гамильтона, который также считается принципом наименьшего действия. В дополнение сформулирована теорема о взаимности работ термоэлектроупругих материалов, которая устанавливает связь между действием внешних сил на одно тело с перемещениями другого, что позволяет проводить анализ работы многокомпонентных систем.

Теория термоэлектроупругости в настоящее время представляет собой широкую область исследований, объединяющую знания из теорий термоупругости и электроупругости. Первоначально проанализируем основные фундаментальные работы, связанные с исследованием этих направлений.

Поведение материалов и описание изменения их форм, возникающие вследствие изменения температуры и механического напряжения, исследуется в теории термоупругости. Первые математические модели по теплопроводности были разработаны в XIX столетии и изложены французским ученым Ж. - М. К. Дюамелем [161], который рассматривал передачу тепла в твёрдых телах, имеющих кристаллическую решетку, с переменным температурным воздействием, а также в работе о теплоте Жан - Батиста Жозефе Фурье [200], который сформулировал теплопроводность в терминах уравнения в частных производных. Разрабатывая методы решения, Ж. Б. Ж. Фурье ввёл множество ранее не применяемых инноваций [200], в том числе в теории дифференциальных уравнений. Полученные результаты в совокупности с исследованиями F. E. Neumann [188] и М. К. Дюамеля [161] были положены в основу классической теории термоупругости (позднее получила название — СТЕ - теория), основная модель которой строилась на предположении, что общая деформация тела состоит из упругой деформации тела и его теплового расширения. Однако, применение этой модели осложнялось тем, что теория не учитывала термодинамические процессы в деформируемом теле.

Теория термоупругости получила свое активное развитие только в 60 - х годах XX столетия несмотря на то, что взаимодействие полей деформации и температуры было отмечено Ж.- М. К. Дюамелем [161] и общее уравнение теплопроводности представлено учёными Г. Джеффрисом [176] и В. Фойгтом [212, 213] намного ранее. В этот период польским ученым В. Новацким публикуются

материалы работ [76, 78, 189, 190, 191, 192, 193], в которых описывается взаимодействие полей деформации и температуры, вводится понятие теории термоупругости. Положения связанной теории термоупругости излагаются в его монографии [77].

В развитие классической теории термоупругости внесли значительный вклад труды Я. С. Подстригача [89, 90, 91], В. И. Даниловской [26, 27], А. Д. Коваленко [46, 47, 48, 49, 50], В. Д. Купрадзе [56] и других. В работе W. Lord и Y. Shulman [183] приводят обобщенную теорию термоупругости, в которую внесенный фактор времени позволяет установить связь между температурой и скоростью деформации.

В конце двадцатого столетия учеными А. Е. Green и Р. М. Naghdi [167] была предложена теория, в которой деформируемые континуумы стоят в зависимости от баланса энтропии. Получившая со временем название GN - теория, была развита для трёх моделей: GN-I, GN-II, GN-III.

Положения, послужившие основой для линейной теории электроупругости, были разработаны В. Фойгтом в начале XX - го века [213], дальнейшее развитие получили в трудах А. Е. Green [163], F. W. Nighams [169], J. Heierle [170], J. C. Hubbard [173]. Положения механики связанных электроупругих полей в современном представлении опубликованы в монографиях известных ученых Л. Д. Ландау [59], У. Мэзона [71], Д. Берлинкура [13], Ж. Можена [70], В. Новацкого [79], В. З. Партон, Б. А. Кудрявцева [82], В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульги [24], Ю. В. Новожилова [80] и других.

Решение связанных задач термоупругости, электроупругости и термоэлектроупругости сопряжено с математическими трудностями при взаимном интегрировании уравнений, вследствие чего, как правило, используют приближенные методы решения: вариационные, метод сеток, численные. С повышением сложности задач и исследованием процессов в различных материалах, а также благодаря развитию программных и вычислительных комплексов и накопленному аппарату расчётов, в настоящее время широко применяется метод конечных элементов (МКЭ), в котором распространение

получили идеи метода возможных перемещений [58]. МКЭ считается универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений и позволяет решать краевые задачи в программных пакетах ANSYS, NASTRAN, COSMOS/M, ЛИРА и др.

По своей сути МКЭ представляет собой автоматизированный процесс вычисления алгебраических матриц, встроенных в ЭВМ, которые в свою очередь содержат набор конечных элементов с возможностью их интегрирования в расчётные матрицы и с последующим численным решением системы уравнений равновесия [7]. Термин «конечный элемент» был введён и применён при решении плоской задачи теории упругости Р. Клафом [155], математическая база сформулирована Р. Курантом [158], в последствии МКЭ был развит на основе вариационно-разностных методов Бубнова-Галеркина, метода Ритца.

Впервые применение МКЭ для решения задач механики деформируемого твёрдого тела представлено в [144, 162]. Решение уравнений равновесия систем конечных элементов в динамической постановке на первых этапах выполнялось путём решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [159], и по мере развития программных комплексов стали появляться возможности применения МКЭ для решения задач электроупругости [8, 22, 53, 139, 218].

Выполнение конечно-элементного статического расчета плоских составных устройств, в том числе из пьезокомпозитов, в осесимметричной задаче в программном комплексе ANSYS описаны в [9]. В [72] А.В. Наседкин, А.С. Турлюн выполнили анализ автоматизированного расчёта с применением конечно-элементного моделирования источников энергии, питающихся за счет преобразований механических воздействий. Авторами указывается на перспективность такого рода систем, как возобновляемых энергетических ресурсов. Указывается на отсутствие в программе возможностей термоэлектроупругого анализа в связанной постановке.

Использование различного математического аппарата в связке с современными подходами по программированию реализованы в конечно-элементном пакете ACELAN. В статье [10] А. В. Белоконь рассматривает

проблематику моделирования пьезоэлектрических устройств, работающих в среде ультразвуковых волн. Расчётный пакет позволяет использовать комплекс алгоритмов, включающий формы седловых матриц для решения задач в динамической и статической постановке с учётом электрических воздействий.

В [165] МКЭ применяется для численного решения уравнений пьезотермоупругости путём рассмотрения взаимного влияния трёхмерных шестигранных конечных элементов с целью исследования возможности управления пьезоэлектрическими материалами, находящимися под воздействием температурного поля.

Авторы работ, выполняя анализ автоматизированного расчёта с применением конечно-элементного моделирования источников энергии, питающихся за счёт преобразований механических воздействий, отмечают трудности в создании расчётных моделей с целью получения результатов, отражающих связанность упругих, температурных и электрических полей. Здесь необходимо отметить, что для качественного и количественного анализа термоэлектроупругих полей в связанной постановке необходимо иметь замкнутые аналитические решения рассматриваемых задач. Проанализируем основные работы термоупругости и электроупругости.

Разработанные теории термоупругости позволили решать задачи, связанные с перемещениями и напряжениями в упругих телах при воздействии температуры. В работах Э.М. Карташова [39, 40, 41], А. В. Лыкова, Ю. А. Михайлова [62, 63], А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [113], Д. В. Христича, М. Ю. Соколовой [116] приводятся различные аналитические методы решения краевых стационарных и нестационарных задач теории теплопроводности, известные как метод интегральных преобразований, метод Дюамеля, метод разделения переменных или метод Фурье и другие, которые, используя математический аппарат дифференциальных уравнений, позволяют решать задачи, где температура задана как функция времени и координата в пространстве.

Обобщенные решения статической и динамической задач теории упругости в механике деформируемого твёрдого тела приводятся в работе Б. Е. Победри [88],

где указывается на необходимость при проведении экспериментов формулировать линейность и нелинейность определяющих соотношений, а также выявление анизотропии с целью формирования математической модели [85, 86, 87].

Оценка напряжённо-деформированного состояния многослойных сред проведена в работах В. Д. Ламзюка и А. К. Приварникова [58], В. С. Никишина и Г. С. Шапиро [74, 75], а также в работах [158, 187].

Б. Е. Победря, рассматривая уравнения движения изотропной упругой среды, а также уравнения совместимости для симметричного тензора напряжений, решает задачи механики деформируемого твёрдого тела с учётом действующих напряжений. Уравнения приводятся в новой постановке, в которой определяются шесть обобщённых уравнений совместимости относительно такого же количества независимых компонент симметричного тензора напряжений и удовлетворяют шести граничным условиям [84, 86, 87, 88].

Разработкой алгоритмов задач теории термоупругости в связанной постановке занимались В. Г. Карнаухова [38], Л. А. Фильштинский, Ю. В. Сиренко [114]; задачами с учётом тепловыделения — А. А. Илюшина в соавторстве с В. С. Ленским, В. А. Ломакиным, А. П. Шмаковым, Б. Е. Победри [32, 33, 34, 35].

В. Н. Кобзарь и Л. А. Фильштинский в [43] предложили математическую модель, описывающую задачи связанной термоупругости с учётом тепловых импульсов и скорости их распространения при рассмотрении упругой пластины с конечным числом отверстий.

Решение задач методом дуальных интегральных уравнений стационарной и нестационарной теплопроводности представлено в [112] с применением теории Меллина; в [210] проведено преобразование уравнений путём разложения в ряды Неймана, в [60, 156] представлено решение в виде регулярного интегрального уравнения.

Для выполнения оценки влияния связанности температурных и механических полей при решении связанных задач термоупругости для тел конечных размеров А. Г. Жигалиным и С. А. Лычевым выделяются граничные

условия, позволяющие решать задачи термоупругости без использования численных методов [31].

В материалах [64] нелинейные уравнения, для случая отсутствия тепловых потоков, приведены к уравнениям движения гиперупругой среды, построены взаимно сопряженные уравнения, определяющие биортогональные системы. Большое внимание в работах С. А. Лычева уделяется вопросам построения алгоритмов для аналитических и численно-аналитических решений по определению напряжённо-деформированного состояния тел, у которых происходит изменение геометрических размеров во времени. Замкнутые решения связанных задач термоупругости для такого рода тел основаны на применении метода в форме биортогональных разложений собственных функций, а также функций, присоединённых в ходе решения задачи, пучков несамосопряжённых операторов дифференциальных уравнений [65, 66, 67, 68, 69, 107].

В работе А. Ю. Родионова [96] рассмотрена линейная связанная статическая система уравнений термоупругости методом голоморфных разложений.

В представленной работе [44] В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов изложили анализ гармонических волн, распространяющиеся вдоль свободной бесконечно длинной цилиндрической оболочки, на основе теории GN - II; позднее в соавторстве с Е. В. Мурашкиным [45] выполнен анализ гармонических термоупругих волн перемещений, микровращений и температуры в связанной постановке.

Д. В. Христич в статье [116] представил термомеханическую задачу с учётом взаимного влияния механических и тепловых факторов применительно к изотропным и анизотропным телам, на которые осуществляются внешние воздействия. Приводятся результаты расчёта разработанной программой, а также представляется анализ напряжённо-деформируемого состояния рассматриваемого тела в результате нагружения.

В [15] П. Н. Вабищевич и М. В. Васильева представляют алгоритм решения задач термоупругости, в основу которого положена конечно-элементарная аппроксимация поля перемещений по пространству и температурного поля для

связанной квазистационарной линейной системы уравнений, описывающей термоупругое состояние тела.

В работе [11] Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина выполнили и описали количественный анализ влияния на конфигурацию динамической неустойчивости геометрических параметров упругой системы и температурного воздействия, используя для геометрически нерегулярной пологой изотропной оболочки замкнутое решение системы дифференциальных уравнений безмоментной теории термоупругости.

В трудах Ю. Э. Сеницкого нестационарные задачи механики решаются с применением метода конечных интегральных преобразований [102, 103, 104, 105, 106, 107]. Исследуются динамические задачи в осесимметричной постановке применительно к упругодеформируемым телам, на которые воздействует температура и электрическое поле.

Метод конечного интегрального преобразования применён в [129] для решения нестационарной задачи термоупругости с выделением сопряжённого оператора. Такой подход позволил установить напряжённо-деформированное состояние рассматриваемого элемента при произвольном температурном воздействии.

Связанность электроупругих полей в пьезокерамических материалах представлена в работах [13], В. З. Партон и Б. А. Кудрявцева [82], Л. Д. Ландау в соавторстве с Е. М. Лифшиц [59], J. E. Jam и V. Jurenas [175, 177] и многих других исследователей.

Исследованием протекающих процессов в пьезокерамике занимались авторы трудов Б. С. Аронов [4, 5], Д. Берлинкур и Д. Керран [13], Л. Я. Гутин [25], Р. Г. Джагунов, А. А. Ерофеев [29], М. В. Королев, А. Е. Карпельсон [51], Л. С. Кременчугский, О. В. Ройцина [52], Е. Кикучи [42], В. В. Клюев [73], В. Е. Полякова, А. И. Потапов, А. К. Сборовский [92], С. И. Пугачев [92], Е. Г. Смажевская, Н. В. Фельдман [108], Б. Яффе, У. Кук, Г. Яффе [141]. Несмотря на большое количество публикаций по применению пьезокерамики в преобразователях, гидроакустических вибраторах, системах автоматики и прочих

устройств, важной задачей остаётся определение значения приложенного потенциала.

А. Н. Соловьевым, В. А. Чебаненко, М. С. Германчук в статье [110] на основе гипотез типа Кирхгофа-Лява строится приближённая теория расчёта колебаний двухслойной пьезоактивной пластины для различных случаев закрепления.

С целью создания постоянного электрического момента Т. Н. Лезгинцева и Н. Б. Фельдман [1] предложили способ поляризации пьезокерамики, связанный с освобождением объёмных зарядов при нагреве, с последующим охлаждением и подключением поляризующего поля без применения диэлектрических жидкостей.

Задачи прямого и обратного пьезоэффекта исследованы в работах [117, 118, 120, 121, 122, 123]. В [207] разработана математическая модель для круглой плоской биморфной пластины, на торцы которой действует потенциал электрического поля. Построенное замкнутое решение нестационарной осесимметричной задачи электроупругой системы позволяет вести оценку напряжённо-деформированного состояния пьезокерамических пластин, работающих на изгиб, а также проводить анализ частотных характеристик.

В [123] предложена математическая модель для определения геометрических размеров биморфной пьезокерамической пластины переменной толщины, входящая в состав ультразвуковых пьезокерамических преобразователей, на лицевой поверхности которой создаётся разность потенциалов в случаях излучения акустической волны с заданной частотой собственных колебаний. Целью исследования является снижение себестоимости преобразователей закрытого типа для приборов бесконтактного обнаружения.

В [126] рассматривается многослойный элемент с системой разрезных кольцевых электродов, в состав которого входят металлический и пьезокерамический слои, являющиеся упругими и электроупругими слоями. Исследуемая динамическая задача в осесимметричной постановке обратного пьезоэффекта решается с применением преобразования Ханкеля и метода конечно-интегральных преобразований и позволяет получить выражения для потенциала электрического поля и компонент вектора перемещений биморфной пластины.

Позднее, в [127, 129] представлен алгоритм действий, направленный на оптимизацию размеров и материалов элементов, работа которых основана на принципах обратного пьезоэффекта.

Динамические задачи термоэлектроупругости для однородных и слоистых тел рассмотрены в трудах [12, 16, 17, 18, 19, 20, 83, 95, 115, 147, 148, 184, 201].

В работе [115] теория для математического моделирования термоупругости оболочек применена в уточненном виде, за основу которой взяты уравнения трёхмерной теории упругости. Для оценки напряжённо - деформируемого состояния дополнительные деформации учитываются в сочетании с упругими деформациями, вызванные действием температурных и электрических нагрузок. Используя вариационный принцип Лагранжа и преобразование Лапласа, авторами В. В. Фирсановым и Л. Х. Нгуеном построена система уравнений равновесия, в которой соответствующие граничные условия получены минимизацией полной энергии оболочки.

Исследуя степень влияния небольших деформаций на итоговые конечные для преднапряжённого электротермоупругого материала, Т. И. Белянковой и В. В. Калинчук был применён метод последовательной линеаризации. Работа [12] дала возможность получить удобные для применения формулы уравнений движения. Кроме того, авторами разработана модель электроупругого полупространства, покрытие которого представлено в виде функционально-градиентных слоев. Для оценки волнового поля применён смешанный подход, основанный на аналитических и численных схемах восстановления функций Грина неоднородных слоёв покрытия.

В [201] рассматривается решение статических трёхмерных задач применительно к материалу, обладающему симметрией свойств в плоскости, перпендикулярной плоскости направления волокон. В статье исследуется концентрация напряжений, которые наблюдаются в непосредственной близости к трещинам, пустотам, включениям при воздействии на тело тепловых, механических, электрических нагрузок.

Для исследования нелинейных термоэлектромеханических взаимодействий в [184] представлено решение одномерной задачи нелинейной термоупругости с тепловой релаксацией. Результаты показывают наличие волн двух типов, распространяющихся в среде – связанной термоупругой волны и звуковой. При этом процесс демонстрирует электрическую активность, которая сопровождает распространение тепловых и механических перемещений.

Учёными S. Bednarek [149], J. Huang [171], V. Levin [181], X. Zhong, Y. Wu, K. Zhang [223] в разное время посвящены работы по определению свойств композитных пьезокерамических материалов при температурном воздействии.

J. Ying и H. M. Wang [222] провели численный эксперимент с целью описания теплодинамических характеристик полого цилиндра конечной длины с шарнирным опиранием по концам. В работе применялась линейная теория термоупругости в несвязанной постановке совместно с методом разложения тригонометрических рядов и методом разделения переменных.

Связанность физических полей в [140] О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова, М. В. Самойлов, Р. Г. Маслов рассматривают путём построения функционально-матричных соотношений между расширенными векторами перемещений и напряжений применительно к слоистым термоэлектроупругим средам.

С целью исследования фазовой задачи линейной термоэлектроупругости применительно к многослойным композитным поверхностям Г. М. Куликовым в соавторстве в [54] используются две функции. В основу первой функции положен коэффициент деформации модели с заданным количеством параметров и составляются вариационные уравнения связанной термопьезоэлектрической задачи. В основу второй функции положена гипотеза о потенциале электрического поля и распределении температуры внутри пьезоэлектрических слоёв по линейной зависимости.

В [195] полый цилиндр с круглым поперечным сечением конечной длины Y. Obata, N. Noda рассматривают как элемент, состоящий из множества слоёв. Применяя теорию слоистых композитов, получены численные результаты для перемещений и напряжений, вызываемых температурой, на основе взятого

предположения, что свойства материала зависят от радиуса, а под воздействием температуры свойства остаются неизменными.

Исследования статической задачи термоэлектроупругости для твёрдого полого цилиндра, подвергнутого механическому воздействию – кручению и неравномерному нагреву поверхности с целью построения общего решения, отражающего воздействие тепла на возникающее электроупругое поле, проведено М. Ishihara в [174].

Применяя теорию сдвиговой деформации третьего порядка и метод конечных элементов F. PintoCarreia с соавторами [199], были получены связанные уравнения перемещения и электрического поля для пьезоэлектрической цилиндрической оболочки.

В статье [2] В. А. Акопьян проводит исследование для поляризованной и неполяризованной пьезокерамики температурных зависимостей постоянных упругости, а также описывает определение диапазонов, в которых указанные зависимости будут иметь стабильные значения. В ходе работы автору удалось установить, что пьезоэлементы с разной относительной толщиной электродированного слоя имеют различные модули упругости.

В работе [23] Н. Н. Головин, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин описывают математическую модель движения неоднородных систем применительно к термостабильным композитным соединениям в условиях внешних термомеханических нестационарных воздействий.

Ф. Alshaikh в [143] рассматривает пьезоэлектрические и пьезокерамические среды в вопросах преломления волн при граничных условиях под действием начальных напряжений, основываясь на обобщённых данных теории линейной пьезотермоупругости Грина и Линдсnea. Под действием квазипродольной, квазипересекающейся тепловой волны и потенциальной волны Ф. Alshaikh получает соотношение амплитуд волн отражения и преломления.

С. А. Калоеров, Е. С. Глушанков в [36] с применением полинома Фабера и метода рядов исследовали термоэлектромагнитное состояние пьезокерамической пластины с одним и несколькими эллиптическими включениями иного материала,

находящейся в условиях линейного теплового потока с заданной плотностью. В работе авторы приводят метод решения задачи термоэлектромагнитоупругости для двух случаев кусочно-однородных пьезопластин. В первом случае пластина рассматривается с одним включением, во втором — со множеством включений при воздействии на пьезопластину линейного потока тепла. В случае одного заданного эллиптического включения определяются основные характеристики термоэлектромагнитоупругости в любой точке пластины и ядра, при этом характеристики в ядре являются линейными функциями комплексных переменных полуосей включения. В случае расположения в пластине нескольких эллиптических включений решение задачи сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений.

А. О. Ватульян и С. А. Нестеров в статье [18] рассматривают действие теплового потока на элемент с неоднородным слоем из пьезокерамики 6 mm, имеющего поляризацию по толщине. Вторая поверхность пластины заземленная. К торцам пластины прикладывается электрический потенциал. Разработан метод определения наведённого потенциала термоэлектроупругого слоя, в основу которого положены система интегральных уравнений Фредгольма 2 - го рода в трансформантах Лапласа и теория вычетов.

Колебания толщины пластины из пьезокерамического композита исследуются учеными J. K. Du, J. Wang, Y. Y. Zhou в условиях однородных начальных термомеханических полей [160].

В работе [202] решаются двумерные задачи термоэлектроупругости для бесконечного пьезоэлектрического тела, имеющего различной формы отверстия и трещину, при воздействии теплового поля. Построением математической модели с использованием теории упругости анизотропного тела Лехницкого на контурах отверстия получена термоэлектроупругая функция Грина в терминах комплексного потенциала.

В статье М. А. Кальмовой [37] анализируется напряжённо-деформированное состояние цилиндрического тела из пьезокерамического материала с учётом

связанности температурного и электрического полей. Приводится общее решение нестационарных термоэлектродупругих полей в связанной постановке.

Z. S. Shao [208] представил решения для полей температуры, перемещений и напряжений в полой цилиндрической конечной длины, на который воздействует осесимметричная температурная и механическая нагрузка. В работе автор использует многослойный подход, основанный на теории многослойных композитов в предположении, что материал однороден по своим свойствам и не меняет их при действии на него температуры и при изменении радиуса.

M. Saadatfar, A. Rastgoo [206] получили аналитическое решение в задаче с осесимметричной постановкой для полой сферы с радиальной поляризацией, на которую оказывается воздействие как внешнего, так и внутреннего давления совместно с температурой. Отмечается, что возникающие в результате воздействия кольцевые напряжения способствуют разрушению упругих полых сфер, в отличие от радиальных напряжений. Альтернативным решением, компенсирующим растягивающие напряжения на внутренней поверхности, авторы предлагают применение многослойного электрического поля. Авторами получена система уравнений равновесия второго порядка, а также численные результаты напряжений пьезокерамического слоя.

Исследованиями пьезотермоупругого поведения пьезоэлектрической сферической оболочки под действием заданной температуры занимались ученые W. Chen, T. Shioya [153]. Преобразовав электрический потенциал и функции перемещения, было получено дифференциальное уравнение в несвязанной постановке второго порядка, а также система, состоящая из трёх аналогичных уравнений, но уже в связанной постановке.

Исследованию поперечных и плоских электрических полей, возникающих в гибридных многослойных пьезоэлектрических пластинах, посвящена работа [178]. Используя вариационный принцип, S. Karuriа и G. G. S. Achary сформулировали уравнение поля с соответствующими граничными условиями и разработали связанную согласованную теорию третьего порядка для статического термоэлектромеханического отклика.

Используя метод разложения в степенные ряды в [152, 220] получено двумерное точное решение для расчёта упругости как прямых, так и обратных пьезоэлектрических эффектов пьезотермоупругого поведения.

Классическая теория слоистых материалов М. Тауа в соавторстве с другими авторами была применена для анализа пьезотермоупругого поведения пьезоэлектрического композитного привода с функционально дифференцированной микроструктурой [209].

Y. Ootao и Y. Tanigawa [196, 197] проанализировали состояние цилиндрической композитной панели полый сферы из пьезоэлектрического материала в состоянии плоской деформации при воздействии осесимметричной тепловой нагрузки.

В [142] исследуется функционально упорядоченная цилиндрическая оболочка с шарнирным опиранием по четырём сторонам и с поверхностным пьезоэлектрическим слоем, подвергаемая неравномерно установившимся тепловым нагрузкам на внутренней и внешней поверхностях, при этом температура на торцах оболочки равна нулю. Для решения поставленной задачи оболочка разбивается на фиктивные слои, и, применяя за основу многослойный приближенный подход и метод последовательных решений, разложенных в виде ряда Тейлора коэффициентов дифференциальных уравнений, получено стационарное пьезотермомеханическое решение для цилиндрической многослойной системы.

D. J. Huang с соавторами в [172] получили аналитические решения для пучков функционально-распределенного (FGM) пьезокерамического материала при воздействии как механических, так и электрических нагрузок на основе двумерных уравнений пьезоэлектричества в предположении, что упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические коэффициенты пьезоэлектрических пучков изменяются только в направлении толщины пучка.

В [154] исследуются блоки сбора энергии в пьезоэлектрическом устройстве. Численное решение и результаты эксперимента свидетельствуют о наличии и влиянии нелинейности электрического поля и электромеханической связи на

отклик принимающего блока. Изменение величины ускорения свободного падения влияет на изменение частоты вынуждающей силы, при которой достигается максимальная амплитуда из-за нелинейности электромеханической связи.

Учёные С. Giorgi, А. Montanaro в своей работе [164] методику линейной теории теплопроводности А. Е. Green и Р. М. Naghdi, изложенную в [167], применяют для теории конечной термоэлектроупругости. Вводится предположение, что существуют различия в соотношении потоков тепла и энтропии для тел с одинаковыми механическими свойствами во всех направлениях и тел, являющихся поперечно-изотропными. Используя метод приближённого представления замкнутых нелинейных систем, при котором исследование нелинейной системы заменяется анализом линейной системы применительно для термопьезоэлектричества. Выведена система уравнений, позволяющая контролировать распространение волн только в зависимости от координаты оси симметрии.

В [150] отмечается, что термическая деформация и пироэлектрические эффекты оказывают существенное влияние на композитные материалы, поэтому предсказать электромеханическое поведение без учёта тепловых эффектов окажется невозможным. Возникающее трение на поверхности контакта между термоэлектрическим телом и проводящим материалом представлено в виде математической модели, описывающей фрикционный контакт. Решается статическая задача, в которой работа материала моделируется нелинейным термоэлектроупругим законом.

Решение задач, направленных на разработку и осуществление замкнутых многослойных электроупругих систем, находящихся под воздействием температурного и электрического полей при нестационарном временном интервале, изложены также в трудах [120, 125, 128, 130,].

J. Yang и H. J. Xiang [221] использовали теорию балки Тимошенко для исследования статического изгиба и динамической реакции приводов многослойного пьезоэлектрического материала при комбинированном термоэлектромеханическом нагружении.

В статье [205] Т. Roy с соавторами установили путём усовершенствованного конечно-элементного решения композитных оболочечных панелей, что проявляющийся пьезоэлектрический эффект при термоупругом нагружении оказывает существенное влияние на реакцию оболочек.

В работе [55] Г. М. Куликов и С. В. Плотникова выполнили моделирование тонкостенной композитной пластины с пьезокерамическими сенсорами в целях задачи о возврате деформированной пластины к её первоначальной форме методом отсчётных поверхностей. Разработан метод, в основе которого лежит конечно-элементная модель для задачи теплопроводности, являющаяся исходными данными для задачи термоэлектроупругости связанных термоэлектромеханических полей для определения электрических потенциалов на электродах пьезокерамических накладок, для приведения пластины к заданной форме за счёт использования обратного пьезокерамического эффекта.

В [180] работа каждого отдельно взятого слоя в многослойном композитном материале рассматривается в созависимости от воздействия температуры. Исследуется балка из углеродно-эпоксидной смолы и пластина из карбона-эпоксидного соединения, которые обеспечены пьезокерамическим слоем из PZT-5A. С увеличением температуры имеют место быть несоответствия между относительным изменением объёма каждого слоя, а также возникновение, в связи с этим, тепловых напряжений между слоями. Отмечается тот факт, что пьезоэлектрики обладают характерной предельной температурой, в случае превышения которой материал утрачивает свое основное свойство. Из этого следует вывод, что температурная нагрузка способна влиять на свойства и характеристики тех элементов или слоёв, которые являются пьезоэлектриками. Результаты показывают на имеющуюся важную зависимость от температуры между свойствами материала и напряжениями, особенно для многослойных конструкций.

А. Azizzadeh и В. Behjat в [145] отмечают, что для многослойных конструкций, содержащих пьезоэлектрические слои, могут возникать излишние

напряжения на плоскостях контакта слоёв, что способно вызвать расслоение при действии внешних нагрузок в виде механических, электрических или термических.

В [157] рассматривается система, состоящая из консольно закреплённой балки и закреплённого на её поверхности пьезокерамического слоя. Строится аналитическое решение в связанной постановке электромеханического движения системы с целью определения перемещений вдоль продольной и поперечной оси закрепления. Для полученных результатов выполняется оценка в сравнении с данными экспериментальных исследований, а также с расчётом МКЭ.

Исследования, касающиеся распространения волн Рэлея в пьезоэлектрической среде, представлены в [168]. Применяя теорию термоупругости Мура-Гибсона-Томсона (MGT) и используя метод волновых мод, объектом исследования выделяется среда, в которой напряжения равны нулю и температура поверхности тела постоянна в течение времени, пока происходит теплопередача.

1.2. Обзор существующих преобразователей

С развитием современных технологий возрастает потребность в разработке преобразователей различных физических параметров. К данным конструкциям относятся датчики, которые выполняют контроль, регулировку, измерение и являются обязательным элементом различных измерительных приборов. Основной принцип, заложенный в их работе - преобразование действующей на чувствительный элемент энергии одного вида в энергию другого вида. Чувствительные элементы датчиков представляют собой детали, которые должны обладать уникальной способностью изменять свои размеры под воздействием внешних нагрузок, а затем восстанавливать первоначальную форму после их снятия и основной задачей является преобразование сигнала на входе в величину, подходящую для последующей информационной обработки [28]. В этой связи упругие чувствительные элементы являются важными компонентами в различных измерительных системах, их влияние на метрологические характеристики

приборов нельзя недооценивать. С расширением технологических возможностей, к основным параметрам материалов, из которых изготовлены упругие чувствительные элементы, предъявляются требования по высокой стабильности, в том числе при значительных изменениях внешних условий.

Разработка преобразователей напрямую связана с потребностями промышленности и экономики тех отраслей, в которых они находят своё применение. В настоящее время выпускаются преобразователи, которые характеризуются диапазоном величин, подлежащих измерению, величиной погрешности, долговечностью, стабильностью работы, временем реагирования. В качестве примера можно привести следующие:

- термопреобразователи сопротивления, в изготовлении которых применяются такие металлы, как вольфрам, никель, медь, платина, обладающие высоким коэффициентом сопротивления, а также линейной зависимостью величины сопротивления от измеряемой температуры;
- бесконтактные пирометры, работающие на основе закона Стефана-Больцмана, который устанавливает взаимосвязь между величиной энергетического свечения и абсолютной температурой излучателя;
- акустические термометры, работающие на зависимости между скоростью распространения звука и температуры;
- термоэлектрические преобразователи (термопары), в основе работы которых положен принцип возникновения электрического эффекта Зеебека;
- кварцевые преобразователи, в которых измеряемая температура среды преобразуется в электрический сигнал непрерывного действия за счёт изменения разности частот колебаний кварцевого генератора с термочувствительным резонатором и опорного кварцевого генератора.

Совершенствование конструкции сопровождается поиском новых подходов и материалов чувствительных элементов. Среди материалов, обладающих пьезоэлектрическими свойствами, можно выделить три основные группы: монокристаллы, моно-, либо поликристаллические плёнки, пьезокерамика. Монокристаллы отличаются стабильностью физико-механических характеристик,

мало подвержены старению, однако имеют высокую стоимость и ограничены в размерах. Применение слоистых плёночных структур осложняется технологическими особенностями, а также трудностями теоретических исследований. В пьезокерамике, в отличие от монокристаллов, эффект старения наступает быстрее, однако такие материалы обладают низкой стоимостью, относительной простотой технологического процесса изготовления, конечной низкой себестоимостью, что является их несомненным преимуществом.

Применение пьезокерамики позволяет разрабатывать довольно широкий класс устройств, различных по назначению (устройства измерения влажности, статических усилий, вязкости жидкостей, измерения температуры и микроперемещений, устройства атоматики и связи, медицинского назначения, гидроакустика и другие). При этом устройства могут отличаться как между собой, так и внутри каждого вида типом пьезоэффекта, количеством чувствительных пьезоэлементов, видом их колебаний. Большинство разработок связано с экспериментальными исследованиями натуральных пьезокерамических образцов с целью определения требуемых наиболее рациональных параметров. Тем не менее, отмечается невысокая точность, обусловленная нестабильностью параметров материала чувствительных элементов под внешними действующими факторами [93]. Развитие теоретических основ позволит сократить экспериментальные исследования, автоматизированное решение задач расширит спектр возможностей, связанных с применением пьезокерамических материалов.

Минимальная масса датчика, его надёжность, долговечность, безотказность, а также отсутствие отклонений результата измерения от действительных величин, либо с минимально допустимой погрешностью, характеризующую точность измерения, в совокупности указывает на достоверность принятых аналитических моделей, которые применялись при разработке преобразователей.

По существующей классификации датчики, для описания работы которых рассматриваются краевые задачи в кандидатской диссертации, относятся к преобразователям неэлектрических величин в электрические. В тепловых датчиках входной информацией является температура, а в качестве выходного параметра

используется деформация пьезокерамической пластины, которая генерируется в электрический сигнал (разность потенциалов, напряжение, заряд).

Датчики со встроенными пьезокерамическими элементами, несмотря на существование некоторых моделей, являются перспективным объектом исследования, поскольку полноценная теоретическая подоснова, описывающая работу чувствительных элементов, на сегодняшний день находится в разработке. Анизотропные свойства пьезокерамических материалов, а также учёт связанности возникающих полей в термоэлектродупругой системе под действием упругого, температурного и электрического полей осложняют описание процессов деформирования. В этой связи разработка теоретических основ и построение аналитических моделей решения задач направлены на повышение метрологических и эксплуатационных характеристик датчиков, которые должны отвечать современным и перспективным системам, что позволит сократить объём экспериментальных исследований.

Вывод.

Проявляющиеся в работе систем пьезотермоэлектродупругие эффекты представляют собой сложные взаимодействия между температурными, механическими и электрическими полями в материалах. Исследование указанных взаимодействий открывает широкий спектр для современных технологических возможностей в области инновационных датчиков, структурных систем, которые обладают способностями учитывать изменения окружающей среды и преобразовывать их в электрические сигналы. Такие свойства недоступны для большинства материалов, например, для сталей. В их поведении могут наблюдаться обратные, негативные процессы, связанные с изменением их физических и механических свойств. Достижения науки в области пьезоэлектриков позволяют генерировать структурные системы, обладающие уникальными свойствами, которые можно использовать для дальнейшего улучшения их характеристик.

На основании анализа литературы и вышеизложенного обзора можно сделать вывод, что в настоящее время проведено значительное количество различных

исследований как теоретических, так и экспериментальных, связанных с решением задач теории термоэлектроупругости. Однако на сегодняшний день не построена общая теория, позволяющая выполнять расчёты тел, обладающих конечными размерами, которая смогла бы учитывать связанность температурных, электрических и упругих полей. Настоящая диссертационная работа, в рамках рассматриваемых параметров и элементов, вносит дополнение в её дальнейшее развитие.

В данной работе сформулирована методика расчёта, а также построены замкнутые алгоритмы задач применительно к круглым сплошным пластинам из пьезокерамического материала. Алгоритм задач разработан в трёхмерной постановке в случае нестационарного осесимметричного теплового воздействия в виде изменения температуры на одной из её лицевых поверхностей.

Основные результаты исследований опубликованы в соавторстве с научным руководителем [132, 133, 134, 135, 136, 137, 138] и автором самостоятельно в работах [97, 98, 99, 100, 101].

ГЛАВА 2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ЖЁСТКОЗАКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ

Дифференциальные уравнения движения, электростатики и теплового баланса в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) , в общем случае, имеют следующий вид [49, 82]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r_*} + \frac{D_r}{r_*} + \frac{\partial D_z}{\partial z_*} &= 0, \quad T_0 \frac{\partial s}{\partial t_*} = \Lambda \left(\nabla \frac{\partial \Theta^*}{\partial r_*} + \frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial z_*^2} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения, отражающие осесимметричное состояние электроупругой трансверсально–изотропной среды с гексагональной кристаллической решёткой класса 6mm с заданной аксиальной поляризацией [49, 82, 182], имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{12} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} + e_{31} \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*} - \gamma_{11} \Theta^*, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} + e_{31} \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*} - \gamma_{11} \Theta^*, \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + C_{33} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} + e_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*} - \gamma_{33} \Theta^*, \quad \sigma_{rz} = C_{55} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}, \\ D_r &= -\varepsilon_{11} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} + e_{15} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right) + g_{11} \Theta^*, \\ D_z &= -\varepsilon_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*} + e_{31} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + e_{33} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} + g_{33} \Theta^*. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Объёмная плотность энтропии $s(r_*, t_*)$, при разложении в ряд Тейлора и с учётом условия, что отношение приращения температуры к текущей температуре много меньше единицы ($\frac{\Theta^*}{T} \ll 1$), определяется зависимостью [16]:

$$s = \gamma_{33} \left(\nabla U^* + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) + k \frac{\Theta^*}{T_0} - g_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial z_*}. \quad (2.3)$$

Список условных обозначений, принятых в диссертационной работе, приведён на стр. 131.

Подстановка (2.2), (2.3) в (2.1) позволяет получить следующую систему дифференциальных уравнений термоэлектроупругости в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0, \\ a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= 0, \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[a_{14} \Theta + a_{15} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{16} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{где } \{U, W, r, z\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*\} / b, \quad \phi = \frac{e_{31}}{C_{11}b} \phi^*, \quad \Theta = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \Theta^*, \quad t = \frac{t_*}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}},$$

$$a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, \quad a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}}, \quad a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, \quad a_5 = \frac{e_{15}}{e_{31}}, \quad a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}},$$

$$a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, \quad a_9 = \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{10} = \frac{e_{15}e_{31}}{C_{11}\varepsilon_{11}},$$

$$a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}}, \quad a_{12} = \frac{g_{11}e_{31}}{\gamma_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}}, \quad a_{14} = k \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}},$$

$$a_{15} = T_0 \frac{b\gamma_{11}\gamma_{33}}{\Lambda\sqrt{C_{11}\rho}}, \quad a_{16} = T_0 b \frac{g_{33}\gamma_{11}}{a_{31}\Lambda} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}.$$

2.1. Постановка исследуемой задачи

Пусть сплошная круглая пьезокерамическая пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega : \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$. Исследуется случай, при котором происходит изменение температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$, $\omega_2^*(r_*, t_*)$ на её лицевых поверхностях соответственно при $z_* = 0, h^*$.

Цилиндрической теплоизолированной поверхности пластины обеспечивается жёсткое закрепление: отсутствует радиальная компонента вектора перемещений и угол поворота, в вертикальной плоскости зафиксирована её нижняя часть. Верхняя и нижняя лицевые электродированные поверхности пластины подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, при этом нижняя поверхность заземлена. Расчётная схема к исследуемой задаче представлена на рис. 2.1.

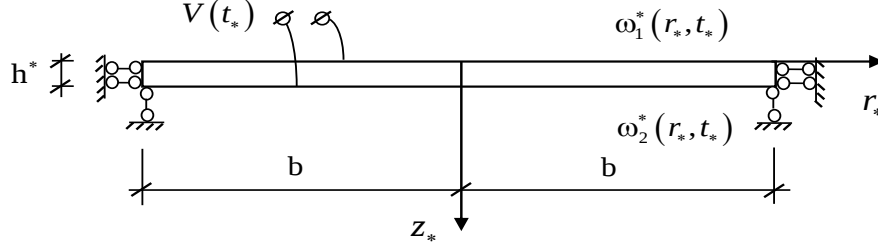


Рис. 2.1. Расчётная схема исследуемого жёсткозакреплённого элемента

Дифференциальные уравнения (2.4) и краевые условия (2.5) – (2.7), представленные в безразмерной форме, являются математической формулировкой исследуемой задачи и представлены ниже:

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \quad \left\{U, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right\}_{|r=1} = 0, \quad (2.5)$$

$$\left[-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{10} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + a_{12} \Theta \right]_{|r=1} = 0;$$

$$z = 0, h \quad a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

$$\phi_{|z=0} = \phi_0, \quad \phi_{|z=h} = 0, \quad \Theta_{|z=0} = \omega_1, \quad \Theta_{|z=h} = \omega_2;$$

$$t = 0 \quad \{U, W, \phi, \Theta\} = 0, \quad \frac{\partial \{U, W\}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{где } \{\omega_1, \omega_2\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \{(\omega_1^* - T_0), (\omega_2^* - T_0)\}, \quad a_{17} = \frac{C_{13}}{C_{11}}, \quad \phi_0(r, t) = \frac{e_{31}}{C_{11}b} \phi_0^*(r, t).$$

Неравенства (2.5) учитывают регулярность решения в центре пластины, условия закрепления и теплоизоляцию её поверхности, а также отсутствие индукции электрического поля $D_{r|r=1}$ при аксиальной поляризации материала.

Равенства (2.6) удовлетворяют следующие условия:

- отсутствие механических напряжений;
- появление электрического потенциала на верхней лицевой поверхности, который определяется в ходе решения задачи;
- заземление нижней лицевой поверхности;
- граничные условия теплопроводности 1-го рода.

В процессе решения задачи вводится вспомогательная функция $W_1(r)$. Введённая функция позволяет обеспечить закрепление пластины от перемещений в вертикальной плоскости (при $r = 1$).

В такой постановке задача моделирует работу пьезоэлементов, преобразующих температурные деформации в соответствующий электрический сигнал. При этом для определения, индуцируемого в процессе деформирования, потенциала электрического поля на верхней лицевой поверхности $\phi_0^*(r, t)$, в случае подключения электродов к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, используется дополнительное граничное условие:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} D_{z|z=0} dS = 0. \quad (2.8)$$

В связи с тем, что система уравнений (2.4) включает в себя несамосопряжённый дифференциальный оператор, проблема интегрирования приводит к исследованию задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается следующая нестационарная задача теплопроводности:

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - a_{14} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0, \quad (2.9)$$

$$r = 0, 1 \quad \Theta(0, z, t) < \infty, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad (2.10)$$

$$z = 0, h \quad \Theta(r, 0, t) = \omega_1, \quad \Theta(r, h, t) = \omega_2, \quad (2.11)$$

$$t = 0 \quad \Theta = 0. \quad (2.12)$$

На втором этапе рассматривается задача электроупругости с учётом определенной функции температуры Θ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}, \quad (2.13)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -a_{12} \nabla \Theta - a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z};$$

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi\}_{|r=0} < \infty, \quad \left\{U, \frac{\partial W}{\partial r}\right\}_{|r=1} = 0, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{10} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -a_{12} \Theta, \quad (2.14)$$

$$z = 0, h \quad a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} = a_7 \Theta, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2.15)$$

$$\phi_{|z=0} = \phi_0, \quad \phi_{|z=h} = 0;$$

$$t = 0 \quad \{U, W, \phi\} = 0, \quad \frac{\partial \{U, W\}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (2.16)$$

2.2. Решение задачи теплопроводности

Задача (2.9) – (2.12) решается с помощью последовательного использования интегрального преобразования Ханкеля [109] по радиальной координате:

$$R_H(n, z, t) = \int_0^1 \Theta(r, z, t) r J_0(j_n r) dr, \quad (2.17)$$

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_H(n, z, t) J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2}, \quad (2.18)$$

и конечного sin-преобразования Фурье по переменной z [109]:

$$L_H(n, m, t) = \int_0^h T_H(n, z, t) \sin(\lambda_{nm} z) dz, \quad (2.19)$$

$$T_H(n, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L(n, m, t) \sin(\lambda_{nm} z), \quad (2.20)$$

где j_n — положительные нули функции $J_1(j_n)$ ($n=0, j_0=0$), $\lambda_{nm} = \frac{m\pi}{h}$,

$$R_H(n, z, t) = f_1(z) p_{1H}(n, t) + f_2(z) p_{2H}(n, t) + T_H(n, z, t),$$

$$\{p_{1H}, p_{2H}\} = \int_0^1 \{\omega_1, \omega_2\} r J_0(j_n r) dr.$$

Общий алгоритм данной задаче построен в диссертационной работе [57].

Выражения для функции $\Theta(r, z, t)$ имеют вид:

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[f_1(z) p_{1H} + f_2(z) p_{2H} + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_{nm} z) \right], \quad (2.21)$$

где

$$L_H(n, m, t) = L_{0H} \exp(-b_1 t) + \int_0^t B_H(\tau) \exp[b_1(\tau - t)] d\tau,$$

$$\{B_H, L_{0H}\} = -a_{14}^{-1} \int_0^h \{F_H, T_{0H}\} \sin(\lambda_{nm} z) dz, \quad T_{0H} = -f_1(z) p_{1H}(n, 0) - f_2(z) p_{2H}(n, 0),$$

$$F_H = \left[j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{14} \frac{\partial}{\partial t} \right] [f_1(z) p_{1H}(n, t) + f_2(z) p_{2H}(n, t)],$$

$$f_1(z) = \frac{\text{sh}[j_n(h-z)]}{\text{sh}(j_n h)}, \quad f_2(z) = \frac{\text{sh}(j_n z)}{\text{sh}(j_n h)}.$$

2.3. Решение связанной задачи электроупругости

Для удовлетворения условия закрепления нижней части цилиндрической поверхности пластины $W(1, h, t) = 0$ вводятся новые функции $w(r, z, t)$, $W_1(r)$, связанные с $W(r, z, t)$ следующими соотношениями:

$$W(r, z, t) = W_1(t) + w(r, z, t), \quad (2.22)$$

$$\phi(r, z, t) = P_1(r, z, t) + \varphi(r, z, t),$$

где $P_1(r, z, t) = a_{12}r\Theta(1, z, t)$.

Подставляя (2.22) в выражения (2.13) – (2.16), получаем выражения для новой задачи относительно функций $U(r, z, t)$, $w(r, z, t)$, $\varphi(r, z, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F_1, \quad (2.23)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial w}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_2,$$

$$-\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial w}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F_3;$$

$$r = 0, 1 \quad \{U, w, \varphi\}_{|r=0} < \infty, \quad \left\{U, \frac{\partial w}{\partial r}\right\}_{|r=1} = 0, \quad \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_{10} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]_{|r=1} = 0, \quad (2.24)$$

$$z = 0, h \quad a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial w}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = B_1, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2.25)$$

$$\phi_{|z=0} = B_2, \quad \phi_{|z=h} = B_3;$$

$$t = 0 \quad U = 0, \quad w = -W_1(0), \quad \frac{\partial U}{\partial t}_{|t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}_{|t=0} = -\frac{dW_1}{dt}_{|t=0}, \quad (2.26)$$

$$\text{где} \quad F_1 = \frac{\partial \Theta}{\partial r} - a_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial r \partial z}, \quad F_2 = a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{d^2 W_1}{dt^2} - a_5 \nabla \frac{\partial P_1}{\partial r} - a_6 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2},$$

$$F_3 = -\left(a_{12} \nabla + a_{13} \frac{\partial}{\partial z}\right) \Theta + \nabla \frac{\partial P_1}{\partial r} + a_8 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2}, \quad B_1 = a_7 \Theta - a_6 \frac{\partial P_1}{\partial z},$$

$$B_2 = \phi_0 - P_1, \quad B_3 = -P_1.$$

Краевая задача (2.23) – (2.26) решается методом разделения переменных. В результате использования преобразования Ханкеля [109], используя выражения (2.27) и (2.28):

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad w_H(n, z, t) = \int_0^1 w(r, z, t) r J_0(j_n r) dr, \quad (2.27)$$

$$\chi_H(n, z, t) = \int_0^1 \varphi(r, z, t) r J_0(j_n r) dr;$$

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad w(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad (2.28)$$

$$\varphi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

получаем следующую краевую задачу:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial \chi_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_H}{\partial t^2} = F_{1H}, \quad (2.29)$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \chi_H + a_6 \frac{\partial^2 \chi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_H}{\partial t^2} = F_{2H},$$

$$j_n^2 \chi_H - a_8 \frac{\partial^2 \chi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} = F_{3H};$$

$$z = 0, h \quad a_{17} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \chi_H}{\partial z} = B_{1H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad (2.30)$$

$$\chi_H|_{z=0} = B_{2H}, \quad \chi_H|_{z=h} = B_{3H},$$

$$t = 0 \quad u_H = 0, \quad w_H = w_{0H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{w}_{0H}, \quad (2.31)$$

где j_n – положительные нули функции $J_1(j_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots; j_0 = 0$),

$$\{F_{2H}, F_{3H}, B_{1H}, B_{2H}, B_{3H}, w_{0H}, \dot{w}_{0H}\} = \int_0^1 \left\{ F_2, F_3, B_1, B_2, B_3, -W_1(0), -\frac{dW_1}{dt} \Big|_{t=0} \right\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$F_{1H} = \int_0^1 F_1 r J_1(j_n r) dr.$$

Введение новых функций U_H, W_H, ϕ_H , которые связаны с u_H, w_H, χ_H :

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad (2.32)$$

$$\chi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + \phi_H(n, z, t),$$

позволяет привести граничные условия (2.30) к однородным.

$$\begin{aligned} \text{Здесь} \quad \{H_1(n, z, t), H_2(n, z, t), H_3(n, z, t)\} &= \{H_1^*(n, z, t), H_2^*(n, z, t), H_3^*(n, z, t)\} + \\ &+ \{f_9(z), f_{10}(z), f_{11}(z)\} B_{2H} + \{f_{12}(z), f_{13}(z), f_{14}(z)\} B_{3H}, \end{aligned}$$

$$H_1^*(n, z, t) = f_3(z)B_{1H|z=0} + f_6(z)B_{1H|z=h}, \quad H_2^*(n, z, t) = f_4(z)B_{1H|z=0} + f_7(z)B_{1H|z=h},$$

$$H_3^*(n, z, t) = f_5(z)B_{1H|z=0} + f_8(z)B_{1H|z=h},$$

$f_3(z) \dots f_{14}(z)$ – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (2.32) в (2.29) – (2.31), при введении дополнительных ограничений для $H_1(n, z, t), H_2(n, z, t), H_3(n, z, t)$, представленных в (2.33):

$$z = 0, h \quad a_{17}j_n H_1 + a_4 \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_6 \frac{\partial H_3}{\partial z} = B_{1H}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2 = 0, \quad (2.33)$$

$$H_{3|z=0} = B_{2H}, \quad H_{3|z=h} = B_{3H},$$

позволяет получить краевую задачу для функций U_H, W_H, ϕ_H :

$$-j_n^2 U_H + a_1 \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - \frac{\partial^2 U_H}{\partial t^2} = R_{1H}, \quad (2.34)$$

$$-a_1 j_n^2 W_H + a_4 \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \phi_H + a_6 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 W_H}{\partial t^2} = R_{2H},$$

$$j_n^2 \phi_H - a_8 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 W_H + a_{11} \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} = R_{3H};$$

$$z = 0, h \quad a_{17}j_n U_H + a_4 \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0, \quad \phi_H = 0, \quad (2.35)$$

$$t = 0 \quad U_H = U_{0H}, \quad W_H = W_{0H}, \quad \frac{\partial U_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_{0H}, \quad \frac{\partial W_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_{0H}, \quad (2.36)$$

$$\text{где} \quad R_{1H} = F_{1H} - \left[-j_n^2 H_1 + a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} \right],$$

$$R_{2H} = F_{2H} - \left[-a_1 j_n^2 H_2 + a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} - a_5 j_n^2 H_3 + a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2} \right],$$

$$R_{3H} = F_{3H} - \left[j_n^2 H_3 - a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} - a_{10} j_n^2 H_2 + a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \right], U_{0H} = -H_1(n, z, 0),$$

$$W_{0H} = w_{0H} - H_2(n, z, 0), \quad \dot{U}_{0H} = -\frac{\partial H_1}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = \dot{w}_{0H} - \frac{\partial H_2}{\partial t} \Big|_{t=0}.$$

Решение краевой задачи (2.34) – (2.36) осуществляется обобщённым методом КИП с неизвестными компонентами вектор-функции ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$ и весовыми коэффициентами α, β, γ :

$$G(n, \lambda_{in}, t) = \int_0^h \left[U_H(n, z, t) \alpha K_1(\lambda_{in}, z) + W_H(n, z, t) \beta K_2(\lambda_{in}, z) \right] dz, \quad (2.37)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{\{K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2},$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h \left[\alpha K_1^2(\lambda_{in}, z) + \beta K_2^2(\lambda_{in}, z) \right] dz, \quad (2.38)$$

где λ_{in} – положительные параметры, образующие счётное множество ($i = 1, 2, 3, \dots$).

На следующем этапе к соотношениям (2.34), (2.36) применяем преобразования (2.37). Уравнения (2.34) и начальные условия (2.36) соответственно умножаются на $\alpha K_1(\lambda_{in}, z)$, $\beta K_2(\lambda_{in}, z)$, $\gamma K_3(\lambda_{in}, z)$ с выполнением интегрирования по высоте пластины и сложении преобразованных равенств:

$$\Phi(U_H, W_H, \phi_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + \phi_H L_3) dz - \frac{d^2 G_{in}}{dt^2} = F_{in}, \quad (2.39)$$

$$t = 0 \quad G(n, \lambda_{in}, 0) = G_0(n, \lambda_{in}), \quad \frac{dG(n, \lambda_{in}, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{G}_0(n, \lambda_{in}). \quad (2.40)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi(U_H, W_H, \phi_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h = & \left[\frac{\partial U_H}{\partial z} a_1 \alpha K_{1in} + U_H \left(-a_1 \alpha \frac{dK_{1in}}{dz} + a_4 j_n \beta K_{2in} + a_9 j_n \gamma K_{3in} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial W_H}{\partial z} (a_4 \beta K_{2in} + a_{11} \gamma K_{3in}) - W_H \left(a_2 j_n \alpha K_{1in} + a_4 \beta \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{11} \gamma \frac{dK_{3in}}{dz} \right) + \\ & \left. + \frac{\partial \phi_H}{\partial z} (a_6 \beta K_{2in} - a_8 \gamma K_{3in}) + \phi_H \left(-a_3 j_n \alpha K_{1in} - a_6 \beta \frac{dK_{2in}}{dz} + a_8 \gamma \frac{dK_{3in}}{dz} \right) \right]_0^h, \end{aligned}$$

$$L_1 = -j_n^2 \alpha K_{1in} + a_1 \alpha \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \beta \frac{dK_{2in}}{dz} - a_9 j_n \gamma \frac{dK_{3in}}{dz},$$

$$L_2 = a_2 j_n \alpha \frac{dK_{1in}}{dz} - a_1 j_n^2 \beta K_{2in} + a_4 \beta \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} - a_{10} \gamma K_{3in} + a_{11} \gamma \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2},$$

$$L_3 = a_3 j_n \alpha \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 \beta K_{2in} + a_6 \beta \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + j_n^2 \gamma K_{3in} - a_8 \gamma \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2},$$

$$F(n, \lambda_{in}, t) = \int_0^h (R_{1H} \alpha K_{1in} + R_{2H} \beta K_{2in} + R_{3H} \gamma K_{3in}) dz,$$

$$G_0(n, \lambda_{in}) = \int_0^h (U_{0H} \alpha K_{1in} + W_{0H} \beta K_{2in}) dz, \quad \dot{G}_0(n, \lambda_{in}) = \int_0^h (\dot{U}_{0H} \alpha K_{1in} + \dot{W}_{0H} \beta K_{2in}) dz.$$

Использование двух условий в виде операционного свойства и равенства нулю внеинтегральных членов:

$$\int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + \phi_H L_3) dz = -\lambda_{in}^2 \int_0^h (U_H \alpha K_{1in} + W_H \beta K_{2in}) dz, \quad (2.41)$$

$$\Phi(U_H, W_H, \phi_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) \Big|_0^h = 0$$

позволяет подойти к задаче для трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$:

$$\frac{d^2 G(n, \lambda_{in}, t)}{dt^2} + \lambda_{in}^2 G(n, \lambda_{in}, t) = -F(n, \lambda_{in}, t), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, i = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.42)$$

$$t = 0 \quad G(n, \lambda_{in}, 0) = G_0(n, \lambda_{in}), \quad \frac{dG(n, \lambda_{in}, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{G}_0(n, \lambda_{in}), \quad (2.43)$$

и, с учётом граничных условий (2.35), получаем однородную задачу относительно компонент ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z), K_2(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z)$:

$$(\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} - a_3 j_n \frac{dK_{3in}}{dz} = 0, \quad (2.44)$$

$$(\lambda_{in}^2 - a_1 j_n^2) K_{2in} + a_4 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{3in} + a_6 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} = 0,$$

$$j_n^2 K_{3in} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} + a_9 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 K_{2in} + a_{11} \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} = 0;$$

$$z = 0, h \quad a_{17} j_n K_{1in} + a_4 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_6 \frac{dK_{3in}}{dz} = 0, \quad \frac{dK_{1in}}{dz} - j_n K_{2in} = 0, \quad K_{3in} = 0. \quad (2.45)$$

При составлении (2.44), (2.45) использовалось условие инвариантности систем (2.34) и (2.44), позволяющее найти коэффициенты α, β, γ :

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = \frac{a_3}{a_9}.$$

Решение уравнения (2.42), с учётом условий (2.43), записывается в виде:

$$G(n, \lambda_{in}, t) = G_0 \cos(\lambda_{in} t) + \dot{G}_0 \lambda_{in}^{-1} \sin(\lambda_{in} t) - \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F(n, \lambda_{in}, \tau) \sin \lambda_{in} (t - \tau) d\tau. \quad (2.46)$$

При исследовании краевой задачи (2.46), (2.45) при $n=0$ формируются две задачи. Первая – это однородная задача на собственные значения относительно компонент ядра преобразования K_{1i0} , а вторая – задача относительно компонент ядра преобразования K_{2i0}, K_{3i0} , которая и имеет практический интерес. В результате её решения получаем выражение (2.47):

$$K_2(\lambda_{i0}, z) = \sin(A_{i0} h) \sin(A_{i0} z) + (\cos(A_{i0} h) - 1) \cos(A_{i0} z), \quad (2.47)$$

$$K_3(\lambda_{i0}, z) = \frac{a_{11}}{a_8} \left[\sin(A_{i0} h) \sin(A_{i0} z) + (\cos(A_{i0} h) - 1) \cos(A_{i0} z) \right] - \\ - \frac{a_4 a_8 + a_6 a_{11}}{a_6 a_8} A_{i0} \sin(A_{i0} h) z - \frac{a_{11}}{a_8} [\cos(A_{i0} h) - 1],$$

и трансцендентное уравнение с целью определения собственных значений λ_{i0} :

$$2a_{11} [1 - \cos(A_{i0} h)] - (a_4 a_8 + a_6 a_{11}) A_{i0} h \sin(A_{i0} h) = 0,$$

где $A_{10} = \lambda_{10} \sqrt{\frac{a_8}{a_4 a_8 + a_6 a_{11}}}.$

Система уравнений (2.44), в общем случае при $n \neq 0$, приводится к разрешающему дифференциальному уравнению 6-го порядка (2.48):

$$\left(b_{1in} \frac{d^6}{dz^6} + b_{2in} \frac{d^4}{dz^4} + b_{3in} \frac{d^2}{dz^2} + b_{4in} \right) K_{2in} = 0. \quad (2.48)$$

Уравнение (2.48) возможно разложить на коммутативные сомножители:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k_{in}^2 \right) \left(b_{1in} \frac{d^4}{dz^4} + b_{5in} \frac{d^2}{dz^2} + b_{6in} \right) K_{2in} = 0, \quad (2.49)$$

где $b_1 = B_2 B_{10} - B_4 B_7, \quad b_2 = B_1 B_{10} + B_2 B_9 - B_3 B_7 - B_4 B_6, \quad b_4 = B_1 B_8 - B_3 B_5,$

$$b_3 = B_1 B_9 + B_2 B_8 - B_3 B_6 - B_4 B_5, \quad b_{5in} = -\frac{b_{4in} + b_3 k_{in}^2}{k_{in}^4}, \quad b_{6in} = -\frac{b_{4in}}{k_{in}^2},$$

$$B_{1in} = a_9 \lambda_{in}^2 + (a_2 a_{10} - a_1 a_9) j_n^2, \quad B_2 = a_4 a_9 - a_2 a_{11}, \quad B_{3n} = -(a_5 a_9 + a_2) j_n^2,$$

$$B_4 = a_6 a_9 + a_2 a_8, \quad B_{5in} = a_{10} j_n^2 (j_n^2 - \lambda_{in}^2), \quad B_7 = \frac{a_1 a_4 a_9}{a_2}, \quad B_{8in} = j_n^2 (\lambda_{in}^2 - j_n^2),$$

$$B_{6in} = a_{11} (\lambda_{in}^2 - j_n^2) + \frac{a_9}{a_2} (a_1 \lambda_{in}^2 + a_2^2 j_n^2 - a_1^2 j_n^2), \quad B_{10} = \frac{a_1 a_6 a_9}{a_2},$$

$$B_{9in} = \frac{a_9}{a_2} (a_2 a_3 - a_1 a_5) j_n^2 - a_8 (\lambda_{in}^2 - j_n^2),$$

где k_{in} — действительный корень следующего бикубического уравнения:

$$b_{1in} (k_{in}^2)^3 + b_{2in} (k_{in}^2)^2 + b_{3in} k_{in}^2 + b_{4in} = 0.$$

С учётом ниже представленного соотношения коэффициентов:

$$b_{5in}^2 - 4b_{1in} b_{6in} > 0, \quad b_{1in} \left(-b_{5in} \pm \sqrt{b_{5in}^2 - 4b_{1in} b_{6in}} \right) > 0,$$

общий интеграл уравнения (2.49), справедливый для пьезокерамического материала, можно записать следующим образом:

$$K_{2in} = D_{1in} \exp(k_{in} z) + D_{2in} \exp(-k_{in} z) + D_{3in} \exp(A_{1in} z) +$$

$$+D_{4in} \exp(-A_{1in} z) + D_{5in} \exp(A_{2in} z) + D_{6in} \exp(-A_{2in} z), \quad (2.50)$$

$$\text{где } A_{1in(2in)} = \left(\frac{-b_{5in} + \sqrt{b_{5in}^2 - 4b_{1in}b_{6in}}}{2b_{1in}} \right)^{0.5}, \quad A_{1in(2in)} = \left(\frac{-b_{5in} - \sqrt{b_{5in}^2 - 4b_{1in}b_{6in}}}{2b_{1in}} \right)^{0.5}.$$

Приведение уравнений (2.44) к (2.48) позволило получить выражения для ядер K_{1in}, K_{3in} , которые имеют следующий вид (2.51):

$$K_{3in} = B_{11in} \left(B_{12in} K_{2in} + B_{13in} \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + B_{14} \frac{d^4 K_{2in}}{dz^4} \right), \quad (2.51)$$

$$K_{1in} = \frac{a_2 j_n}{(\lambda_{in}^2 - j_n^2)} \left[(a_1 \lambda_{in}^2 + a_2^2 j_n^2 - a_1^2 j_n^2) \frac{dK_{2in}}{dz} + a_1 a_4 \frac{d^3 K_{2in}}{dz^3} + (a_2 a_3 - a_1 a_5) j_n^2 \frac{dK_{3in}}{dz} + a_1 a_6 \frac{d^3 K_{3in}}{dz^3} \right],$$

$$\text{где } B_{11in} = [B_{3in} (B_4 B_{9in} - B_{3in} B_{10}) - B_4^2 B_{8in}]^{-1}, \quad B_{12in} = B_4^2 B_{5in} - B_{1in} (B_4 B_{9in} - B_{3in} B_{10}),$$

$$B_{13in} = B_4 (B_4 B_{6in} - B_{1in} B_{10}) - B_2 (B_4 B_{9in} - B_{3in} B_{10}), \quad B_{14} = B_4 (B_4 B_7 - B_2 B_{10}).$$

Определить постоянные $D_{1in} \dots D_{6in}$ и собственные значения λ_{in} возможно в результате подстановки (2.50) и (2.51) в условия (2.45).

Выражения для функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)$ получаем путём применения к выражению (2.46) формулы обращения (2.38), (2.28), а также с учётом (2.22), (2.32):

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{K_1(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right], \quad (2.52)$$

$$W(r, z, t) = W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{K_2(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right],$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{K_3(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right].$$

Завершая исследование задачи, определяем функции $W_1(t), H_1, H_2, H_3$.

Функция $W_1(t)$, определяется из условия $W(1, h, t) = 0$, инерционная составляющая ($\frac{d^2 W_1}{dt^2} = 0$) не учитывается:

$$W_1(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J_0(j_n)} \left[H_2(n, h, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{K_2(\lambda_{in}, h)}{\|K_{in}\|^2} \right].$$

Упрощая правые части уравнений (2.34), получаем выражения для H_1, H_2, H_3 :

$$\begin{aligned} -j_n^2 H_1 + a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 H_2 + a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} - a_5 j_n^2 H_3 + a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} &= 0, \\ j_n^2 H_3 - a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} - a_{10} j_n^2 H_2 + a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

При этом сформированные расчётные соотношения (2.53) аналогичны (2.44) при $\lambda_{in} = 0$ ($H_1 \sim K_{1in}$, $H_2 \sim K_{2in}$, $H_3 \sim K_{3in}$), и их решения определяются равенствами (2.50), (2.51) при удовлетворении граничных условий (2.33). Выражения для H_3, H_4, H_5 позволяют определить функции $f_3(z) \dots f_{14}(z)$.

Проявляющийся характер деформирования пластины, имеющей жёсткое закрепление по радиальной координате, указывает на необходимость разделения верхней лицевой поверхности. Введение радиуса раздела R и устройство двух электродов, с подключением их к измерительному прибору, позволяет выполнить более качественную оценку индуцируемого электрического импульса. В этом случае потенциал электрического поля $\phi_0(r, t)$, индуцируемый на двух эквипотенциальных поверхностях, определяется следующим образом:

$$\phi_0(r, t) = \phi_{01}(t) H(R - r) + \phi_{02}(t) H(r - R). \quad (2.54)$$

Выражения для определения потенциалов $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ становится возможным получить путём подстановки выражения (2.54) в дополнительное граничное условие (2.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^R D_{z|z=0} r dr = \frac{\partial}{\partial t} \int_R^1 D_{z|z=0} r dr = 0. \quad (2.55)$$

Для определения функций потенциалов $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ в начале рассматривается задача с короткозамкнутыми лицевыми электродированными

поверхностями в случае действия температурной нагрузки $\omega_1(r, t), \omega_2(r, t)$. Далее, на следующем этапе, переходим к исследованию задачи электроупругости при действии нагрузки в виде неизвестных электрических потенциалов $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$.

При этом здесь принимаем $\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} = 0$. Использование принципа суперпозиций для рассматриваемых линейных задач даёт возможность сложить полученные решения и определить $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ с помощью равенств (2.55):

$$\begin{aligned} \phi_{01}(t) &= Q_{01}^{-1} [Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)], \quad \phi_{02}(t) = Q_{02}^{-1} \left[-Q_1(t) + \frac{1-R^2}{R^2} Q_2(t) + Q_4(t) \right], \\ \text{где} \quad Q_1(t) &= R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n R)}{J_0(j_n)^2} \left\{ \frac{a_{10}}{a_5} H_1^*(n, 0, t) + \frac{a_{11}}{j_n} \frac{\partial H_2^*(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{a_8}{j_n} \frac{\partial H_3^*(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(n, \lambda_{in}, t)}{\|K_{in}\|^2} \left[\frac{a_{10}}{a_5} K_1(\lambda_{in}, 0) + \frac{a_{11}}{j_n} \frac{dK_2(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=0} - \frac{a_8}{j_n} \frac{dK_3(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right\}, \\ Q_2(t) &= R^2 \left[a_{11} \frac{\partial H_2^*(0, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{\partial H_3^*(0, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_{i0}, 0, t)}{\|K_{i0}\|^2} \left[a_{11} \frac{dK_2(\lambda_{i0}, z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{dK_3(\lambda_{i0}, z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right], \\ Q_3(t) &= a_{13} \int_0^R \omega_1(r, t) r dr, \quad Q_4(t) = a_{13} \int_R^1 \omega_1(r, t) r dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{01} &= - \left\{ \frac{R^4}{2} \left[a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] + 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(j_n R)}{j_n J_0(j_n)} \right]^2 \left[\frac{a_{10}}{a_5} j_n f_9(z) + a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right\}, \\ Q_{02} &= - \left\{ \frac{(1-R^2)^2}{2} \left[a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] + 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(j_n R)}{j_n J_0(j_n)} \right]^2 \left[\frac{a_{10}}{a_5} j_n f_9(z) + a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В этом случае $V(t)$ определяется равенством:

$$V(t) = \phi_{01}(t) - \phi_{02}(t). \quad (2.56)$$

2.4. Численный анализ результатов исследуемой задачи

Для выполнения численного анализа задачи принимается сплошная круглая пластина ($b = 14 \times 10^{-3}$ м), изготовленная из аксиально поляризованного

пьезокерамического состава средней сегнетожесткости PZT–4 и мягкого пьезокерамического состава PZT–5A (табл. 2.1) [153, 204, 211].

Рассматривается случай изменения температуры на верхней лицевой поверхности ($z_* = 0$) (рис.2.2) при $\omega_2^*(r_*, t_*) = 0$:

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad (2.57)$$

принимая, что $T_{\max}^* = 373 \text{ K}(100^\circ \text{C})$, $T_0 = 293 \text{ K}(20^\circ \text{C})$, $t_{\max}^* = 0.2 \text{ с}$.

Таблица 2.1

Физико-механические характеристики материалов

Наименование характеристики	Обозначение, единицы измерения	Пьезокерамический материал	
		PZT–4	PZT–5A
Модули упругости	$C_{11} \times 10^{-10}, \text{ Па}$	13,9	9,92
	$C_{12} \times 10^{-10}, \text{ Па}$	7,78	5,4
	$C_{13} \times 10^{-10}, \text{ Па}$	7,43	5,08
	$C_{33} \times 10^{-10}, \text{ Па}$	11,5	8,69
	$C_{55} \times 10^{-10}, \text{ Па}$	2,56	1,6
Коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого материала	$\varepsilon_{11} \times 10^9, \text{ Ф/м}$	6,46	15,3
	$\varepsilon_{33} \times 10^9, \text{ Ф/м}$	5,62	15
Пьезомодули	$e_{15}, \text{ Кл/м}^2$	12,7	12,3
	$e_{31}, \text{ Кл/м}^2$	-5,2	-7,2
	$e_{33}, \text{ Кл/м}^2$	15,1	15,1
Коэффициент температурного расширения	$\alpha_t \times 10^5, \text{ К}^{-1}$	0,4	0,33
Коэффициент теплопроводности	$\Lambda, \text{ Вт/(м К)}$	1,6	1,8
Коэффициент объёмной теплоёмкости	$k \times 10^{-6}, \text{ Дж/(м}^3 \text{ К)}$	3,0	3,0
Компоненты пироккоэффициентов	$g_{11} \times 10^6, \text{ Кл/(м}^2 \text{ К)}$	-0,6	-2,0
	$g_{33} \times 10^6, \text{ Кл/(м}^2 \text{ К)}$	-0,6	-2,0
Плотность	$\rho \times 10^{-3}, \text{ кг/м}^3$	7,5	7,65

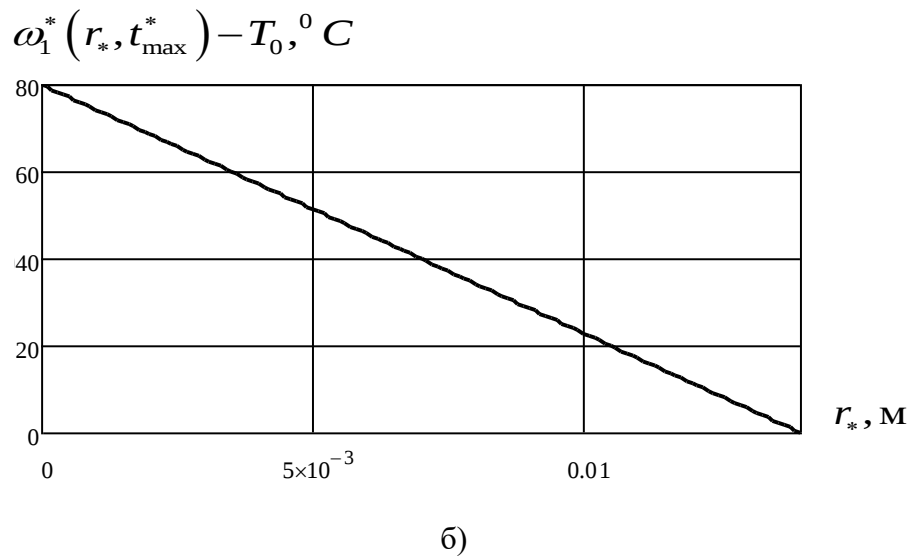
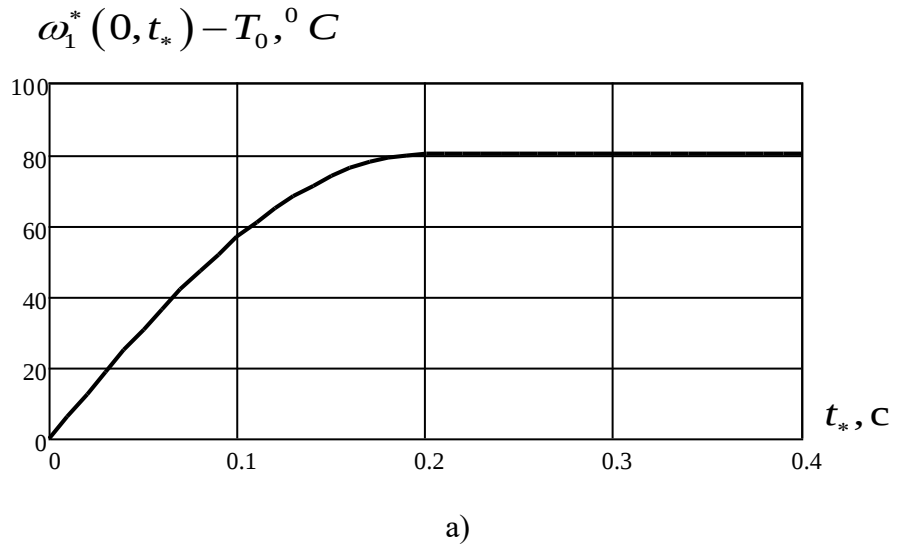


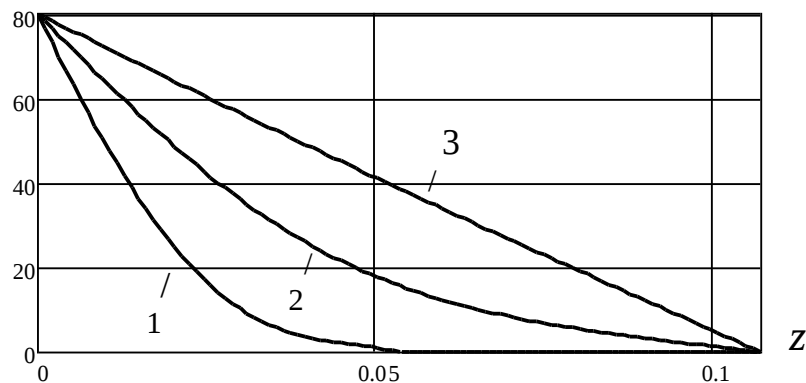
Рис.2.2. Изменение " $\omega_1^*(r_*, t_*) - T_0$ ":

а) во времени t_* ; б) по радиальной координате r_*

На рис. 2.3, 2.4 представлены эпюры $\Theta^*(0, z, t)$ по аксиальной координате для пластин различной толщины (на рис.2.3 для относительной толщины $h=0.107$ ($h^*=1.5 \times 10^{-3}$ м), на рис. 2.4 – для $h=0.143$ ($h^*=2 \times 10^{-3}$ м). Позициями 1, 2, 3 обозначены результаты соответствующие: $t = t_{\max}$, $2 t_{\max}$, $10 t_{\max}$ – для элементов, имеющих относительную толщину $h=0.143$ и $t = t_{\max}$, $3 t_{\max}$, $15 t_{\max}$ – для элементов, имеющих относительную толщину $h=0.107$ $\left(t_{\max} = \frac{t_{\max}^*}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \right)$.

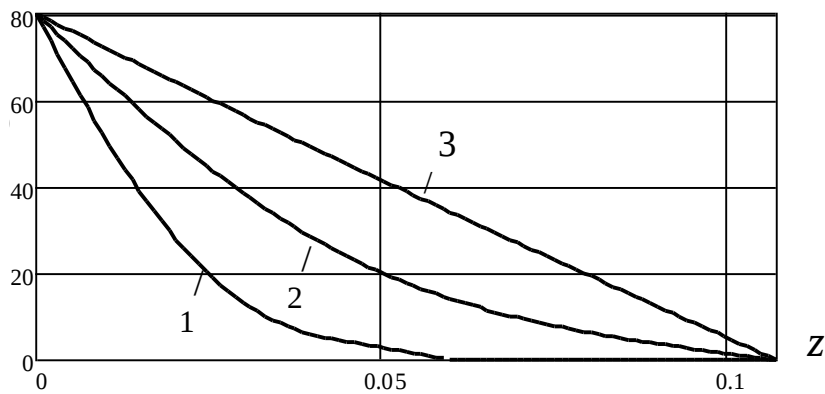
На основании полученных результатов расчёта заключаем, что постоянный температурный режим устанавливается в рассматриваемых сплошных пластинах достаточно быстро. Это объясняется высокими характеристиками теплопроводности материалов, из которых выполнены элементы (см. табл. 2.1). При относительной толщине элементов $h=0.107$ температурное поле формируется за время $t=10 t_{max}$, а для относительной толщины $h=0.143$ – за время $t=15 t_{max}$.

$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ \text{C}$$



а) PZT-4

$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ \text{C}$$

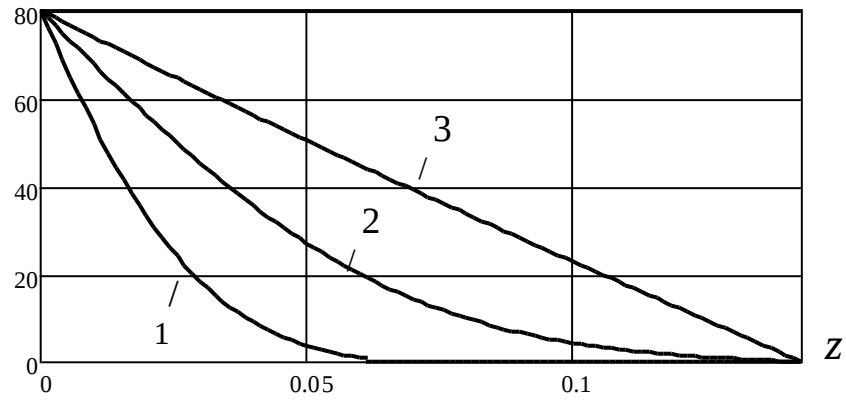


б) PZT-5A

Рис.2.3. Графики изменения $\Theta^*(0, z, t)$ по z ($h=0.107$),

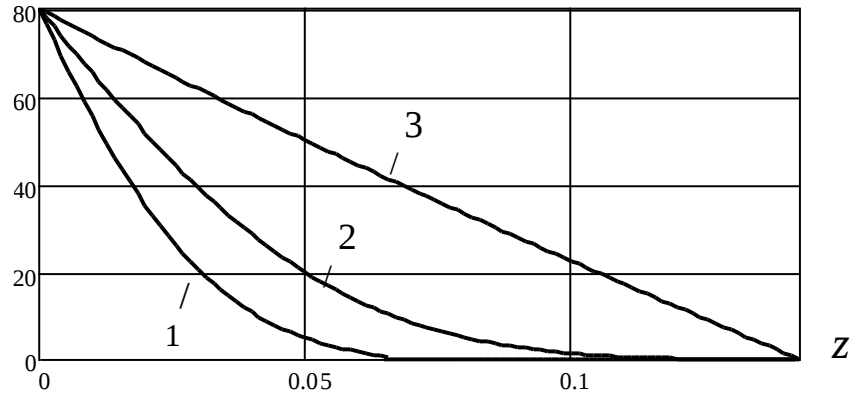
1: $t = t_{max}$; 2: $t = 2 t_{max}$; 3: $t = 10 t_{max}$

$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



а) PZT-4

$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



б) PZT-5A

Рис.2.4. Графики изменения $\Theta^*(0, z, t)$ по z ($h = 0.143$),

$$1: t = t_{max}; 2: t = 3 t_{max}; 3: t = 15 t_{max}$$

Результаты, полученные при решении задачи теплопроводности, позволяют аппроксимировать температурное поле в пластине в виде следующей линейной зависимости:

$$\Theta^*(r_*, z_*, t_*) = \left(1 - \frac{z_*}{h^*}\right) [\omega_1^*(r_*, t_*) - T_0]. \quad (2.55)$$

Учитывая характер деформирования круглой жёсткозакреплённой пластины, который наблюдался при построении аналитической модели исследуемой задачи, с целью качественной оценки индуцируемого электрического импульса верхняя лицевая поверхность разделяется, формируются две эквипотенциальные плоскости

с радиусом раздела $R=0.6$ и размещением на них двух электродов, с последующим подключением электродов к измерительному прибору.

Изменение $V(t)$ по времени (для материала PZT-4) представлено в виде графиков на рис. 2.5. Сплошной линией обозначена зависимость при использовании двух электродов на верхней лицевой поверхности пластины с радиусом раздела поверхности электродного покрытия $R=0.6$, а пунктирной – сплошное электродное покрытие по всей лицевой поверхности.

Графики, представленные на рис. 2.5 показывают, что случай подключения сплошных электродированных поверхностей пластины (верхней и заземленной нижней) к вольтметру, т. е. без границы разделения верхней плоскости электродного покрытия, не является эффективным (на рис. 2.5 показано пунктирной линией). Разность потенциалов в этом случае имеет небольшие показатели по сравнению со случаем устройства двух эквипотенциальных поверхностей.

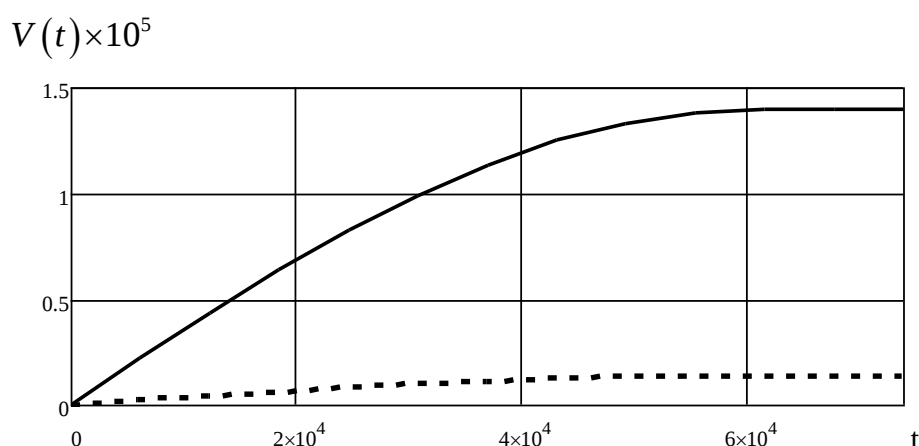
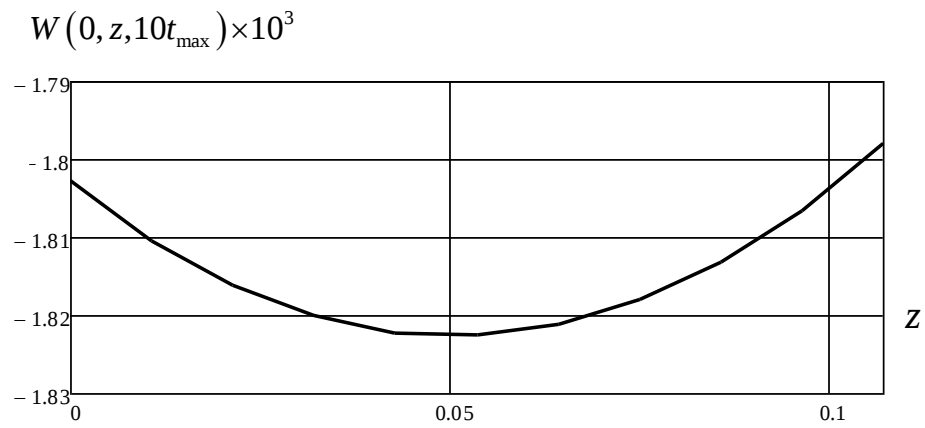


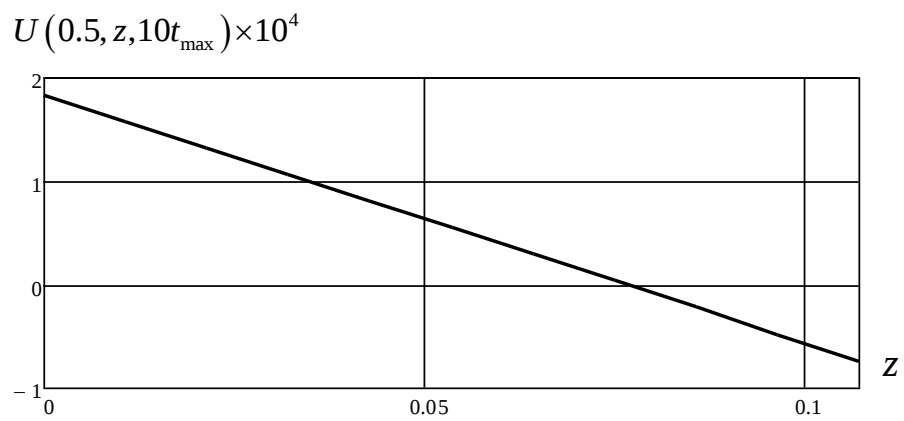
Рис.2.5. Изменение $V(t)$ по времени: сплошная линия – два электрода с $R=0.6$, пунктирная – сплошное электродное покрытие

Графики изменения $W(0, z, t_{\max})$, $U(0.5, z, t_{\max})$, $\phi(r, z, t_{\max})$ по аксиальной переменной представлены на рис. 2.6, 2.7, а на рис. 2.8 построены графики зависимости нормальных напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t_{\max})$ по радиальной координате при установившемся температурном режиме за время $t = 10t_{\max}$ ($t_{\max}^* = 0.2$ с, $b = 14 \times 10^{-3}$ м, $h^* = 1.5 \times 10^{-3}$ м). На рис. 2.8 показаны результаты для случая устройства двух

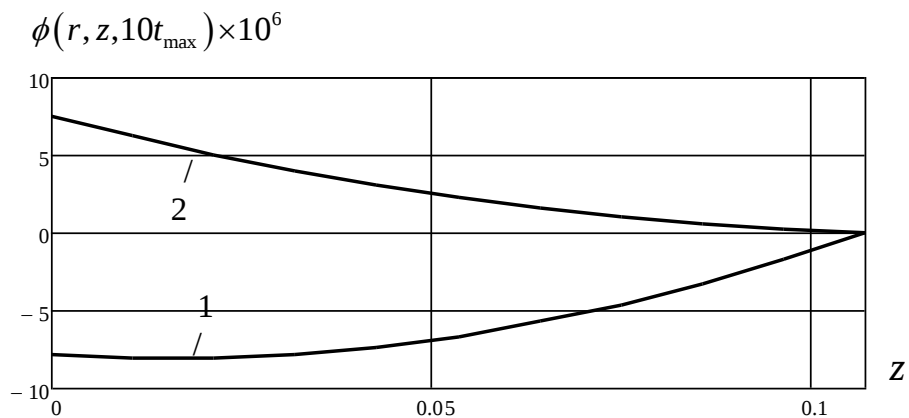
эквипотенциальных поверхностей с радиусом раздела $R=0.6$ с размещёнными на каждой из них электродами.



а)

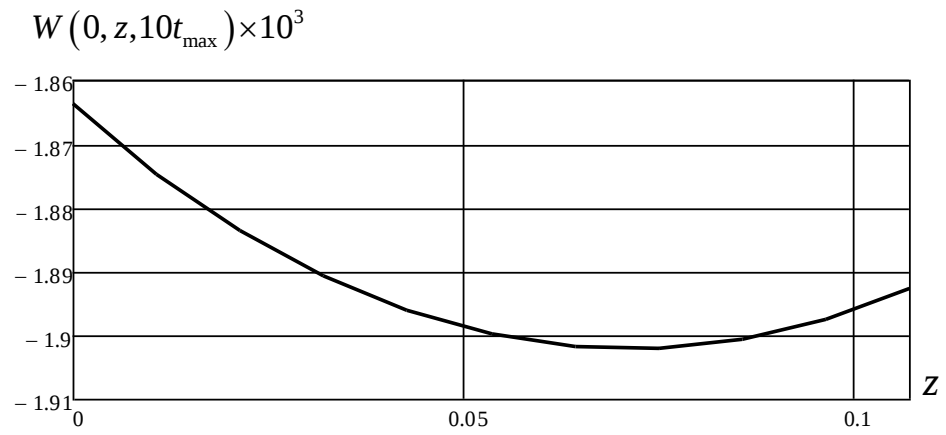


б)

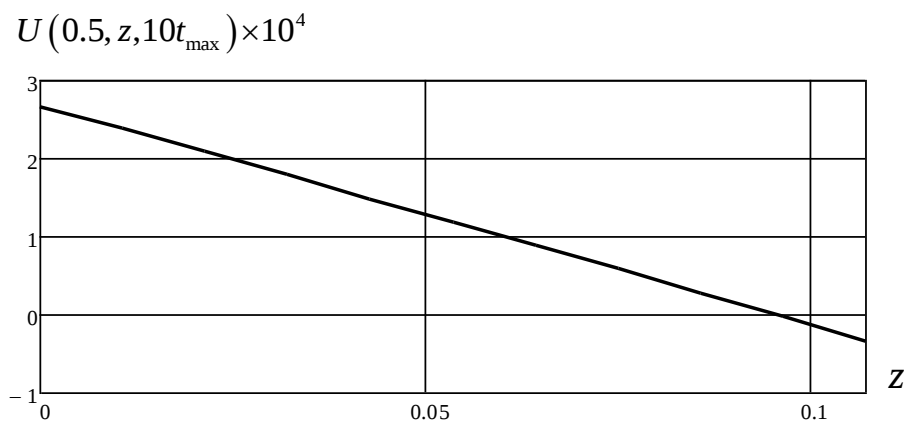


в)

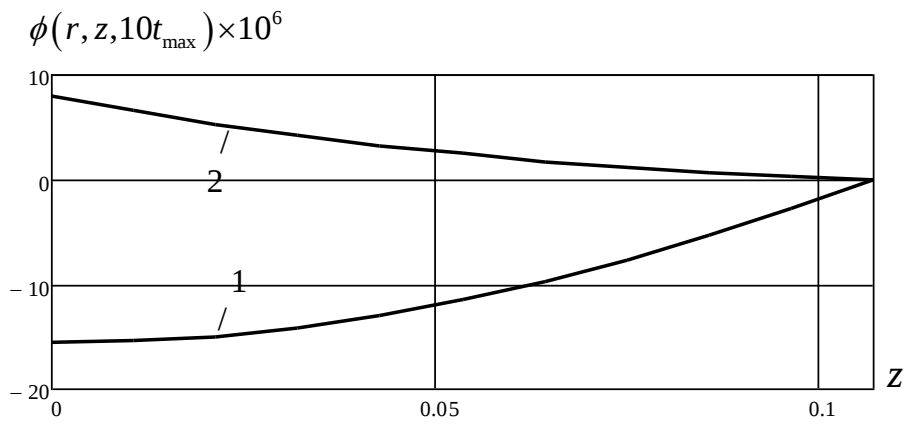
Рис.2.6. Изменение перемещений и потенциала по аксиальной координате (состав PZT-4): 1: $r = 0$, 2: $r = 0.8$



а)

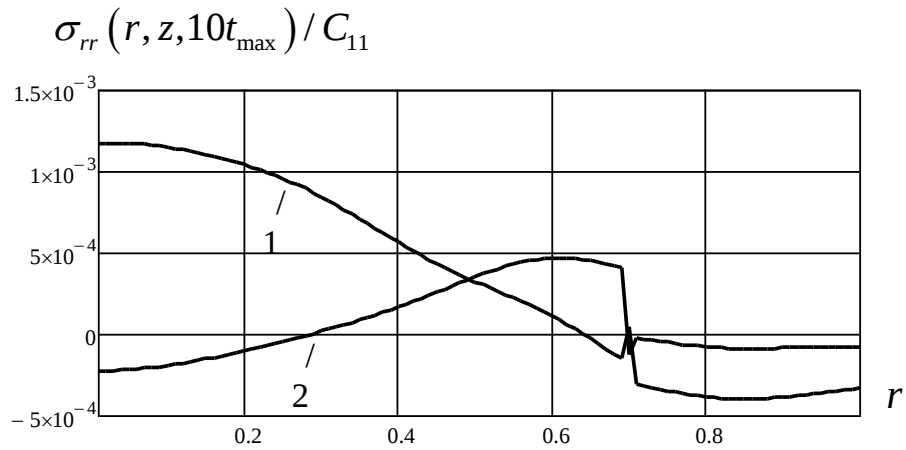


б)

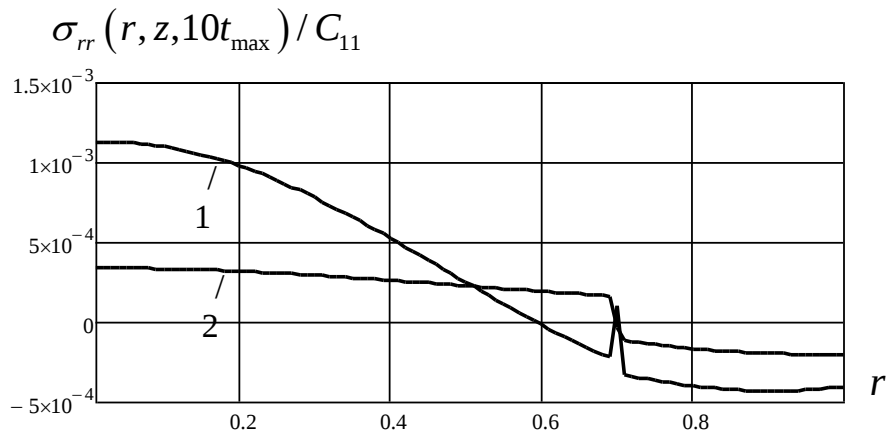


в)

Рис.2.7. Изменение перемещений и потенциала по аксиальной координате (состав PZT-5A): 1: $r = 0$, 2: $r = 0.8$



а) состав PZT-4



б) состав PZT-5A

Рис.2.8. Изменение $\sigma_{rr}(r, z, 10t_{\max})$
по радиальной координате: 1: $z = 0$, 2: $z = h$

По результатам численного анализа исследуемой задачи следуют выводы:

– изменение температуры верхней лицевой поверхности приводит к изгибу пластины. При этом на верхней плоскости в целом наблюдаются растягивающие нормальные радиальные напряжения $\sigma_{rr}(r, 0, 10t_{\max})$, а на участке $r > 0.65$ – сжимающие напряжения (см. рис.2.8, а). На нижней лицевой поверхности, в отличие от классических задач для тонких пластин, на некоторых участках появляются растягивающие напряжения $\sigma_{rr}(r, h, 10t_{\max})$ (см. рис.2.8, б);

– использование более «мягкого» пьезокерамического состава PZT–5A по сравнению со среднежестким составом PZT–4 приводит к росту перемещений и, соответственно, возрастает потенциал электрического поля.

Для того, чтобы определить на сколько влияют силы инерции элемента ($b = 14 \times 10^{-3}$ м, $h^* = 1.5 \times 10^{-3}$ м) на его деформированное состояние, производилось варьирование скорости изменения $\omega_1^*(r_*, t_*)$ в начальный момент времени. Результаты расчёта перемещений $W(0, 0, t)$ показывают, что инерционные характеристики необходимо учитывать при высокоскоростном изменении $\omega_1^*(r_*, t_*)$. На рис. 2.9 представлено два графика: сплошной линией обозначены результаты, полученные с учётом сил инерции и пунктирной линией – результаты, полученные без учёта сил инерции пластины при $t_{\max}^* = 10^{-4}$ с.

Для обобщения полученных результатов принимаем во внимание, что на первом этапе $\omega_1^*(r_*, t_*)$ изменяется по гармоническому закону. И данную зависимость, при $t_* \leq t_{\max}^*$, можно оценить с помощью параметра частота вынужденных колебаний θ :

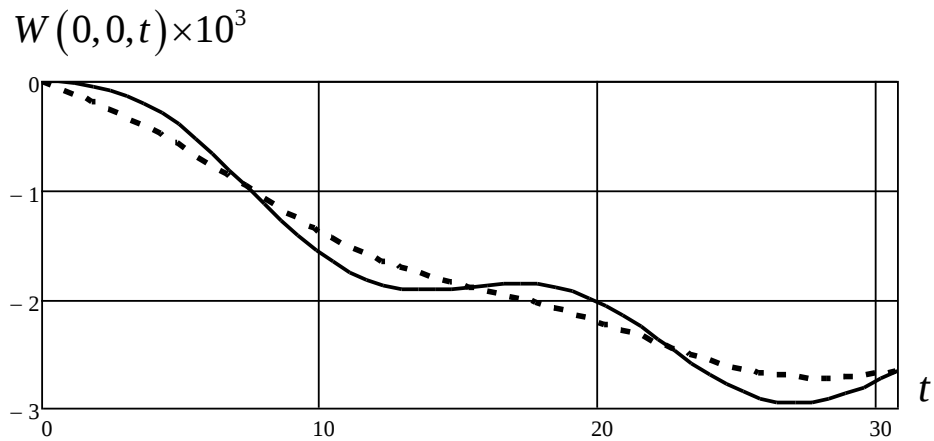
$$\theta = \frac{\pi}{2t_{\max}^*}.$$

При этом первая частота собственных колебаний ψ определяется равенством:

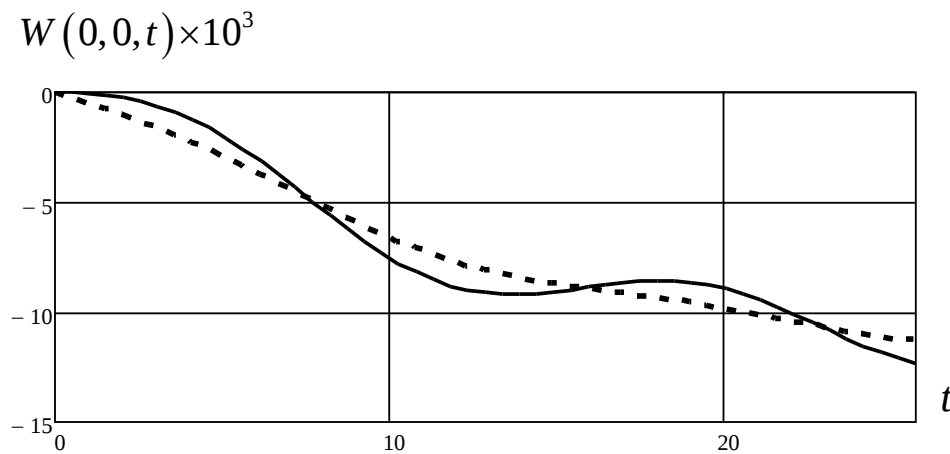
$$\psi = \frac{\lambda_{11}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}.$$

Анализ результатов расчёта, согласно построенному алгоритму решения (см. рис. 2.9), позволяет заключить, что силы инерции допустимо не учитывать тогда, когда первая частота собственных колебаний ψ существенно больше частоты вынужденных колебаний θ , а именно, в случае:

$$\theta \leq 0.15\psi.$$



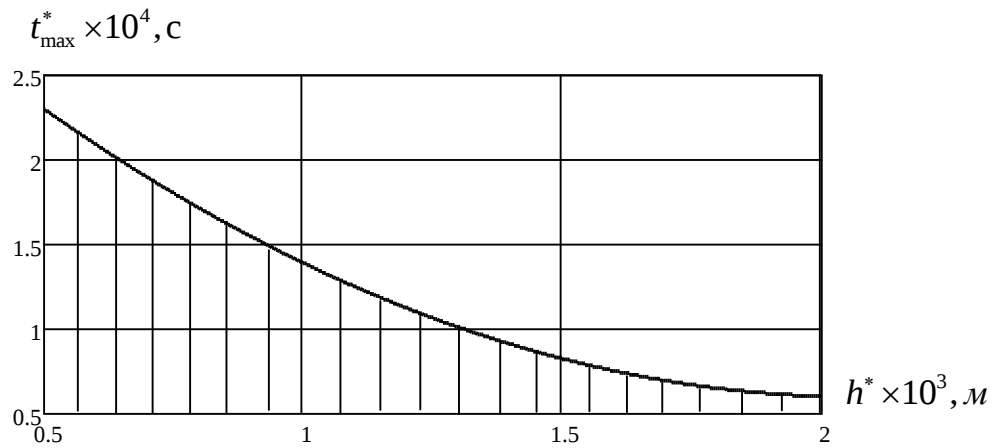
а) состав PZT-4



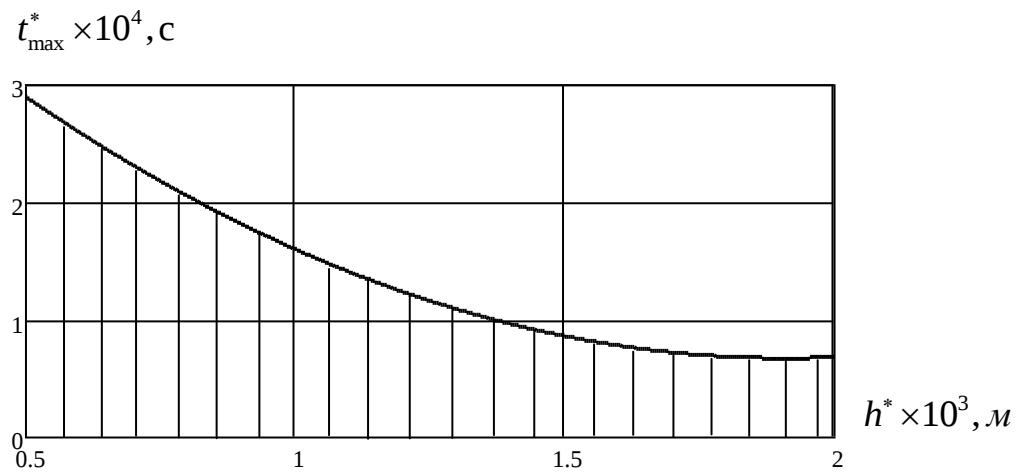
б) состав PZT-5A

Рис.2.9. Изменение $W(0,0,t)$ по времени: сплошная линия– с учётом сил инерции, пунктирная– без учёта сил инерции

Используя вышеуказанную зависимость для пластин различной толщины h^* , получаем графики для двух рассматриваемых материалов (см. рис.2.10). На графиках заштрихованная область соответствует предельному значению времени $t_{\max}^*$, по достижении которого возникает необходимость учитывать инерционные характеристики сплошных круглых пластин, выполненных из пьезокерамического материала. Соответственно, незаштрихованная часть графиков – это зависимость рассматриваемых параметров, при которых можно использовать только уравнения равновесия, что существенно упрощает исходную систему дифференциальных уравнений.



а) пьезокерамика состава PZT-4



б) пьезокерамика состава PZT-5A

Рис.2.10. Зависимость скорости изменения нагрузки от толщины пластины " $t_{\max}^* - h^*$ "

Полученные результаты динамического расчёта в несвязанной постановке позволяют:

- определить напряжённо-деформированное состояние рассматриваемой круглой сплошной пластины из пьезокерамического материала;
- установить температурное и электрическое поля без ограничений по толщине пластины и скорости изменения температурной нагрузки.

Фрагмент автоматизированного программного расчёта в среде Mathcad-15.0, выполненный по результатам исследования задачи, приведён в Приложении 2.

ГЛАВА 3. СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ЖЁСТКОЗАКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ

Исследуется электроупругая система, у которой, согласно результатам, приведённым в главе 2, геометрические размеры и температурная нагрузка позволяют не учитывать её инерционные характеристики, что даёт возможность использовать при построении замкнутого решения связанной задачи уравнения равновесия.

3.1. Постановка исследуемой задачи

Рассмотрим пластину, выполненную из пьезокерамического материала, находящуюся в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) . Пластина занимает область Ω : $\{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$. Исследуется работа пластины в условиях, при которых происходит следующее изменение нагрузки: на верхней лицевой поверхности изменение температуры задаётся как $\omega_1^*(r_*, t_*)$, на нижней лицевой плоскости известна температура внешней среды ϑ^* .

Цилиндрической поверхности пластины обеспечены теплоизоляция и жёсткое закрепление, при котором отсутствует радиальная компонента вектора перемещений и угол поворота, а в вертикальной плоскости зафиксирована её нижняя часть. Верхняя и нижняя лицевые поверхности пластины электродированны, подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. Нижняя лицевая плоскость пластины заземлена (рис. 3.1).

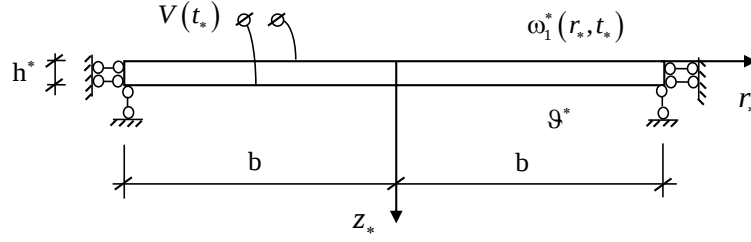


Рис. 3.1. Расчётная схема задачи главы 3

Дифференциальные уравнения (2.4), без учёта сил инерции и краевые условия (3.2) – (3.4) в безразмерной форме [49, 82, 182] составляют математическую формулировку исследуемой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad (3.1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta + a_{14} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0;$$

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \quad \left\{ U, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right\}_{|r=1} = 0, \quad (3.2)$$

$$\left[-\frac{\partial \phi}{\partial r} + a_{10} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + a_{12} \Theta \right]_{|r=1} = 0;$$

$$z = 0, h \quad a_{16} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

$$\phi_{|z=h} = \phi_0, \quad \phi_{|z=0} = 0, \quad \Theta_{|z=0} = \omega_1, \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} + a_{17} \Theta \right)_{|z=h} = a_{17} g;$$

$$t = 0 \quad \{U, W, \phi, \Theta\} = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{где} \quad \{U, W, r, z\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*\} / b, \quad \{\phi, \phi_0\} = \frac{e_{31}}{C_{11} b} \{\phi^*, \phi_0^*\}, \quad t = \frac{\Lambda}{k b^2} t_*,$$

$$\begin{aligned} \{\Theta, \omega_1, \vartheta\} &= \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \left\{ \Theta^*, (\omega_1^* - T_0), (\vartheta^* - T_0) \right\}, \quad a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, \quad a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}}, \quad a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, \\ a_5 &= \frac{e_{15}}{e_{31}}, \quad a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, \quad a_9 = \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{10} = \frac{e_{15}e_{31}}{C_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}}, \\ a_{12} &= \frac{g_{11}e_{31}}{\gamma_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}}, \quad a_{14} = T_0 \frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{C_{11}k}, \quad a_{15} = T_0 \frac{g_{33}\gamma_{11}}{e_{31}k}, \quad a_{16} = a_2 - a_1, \quad a_{17} = \alpha \frac{b}{\Lambda}. \end{aligned}$$

Конвективный теплообмен нижней лицевой поверхности пластины с окружающей средой (граничные условия 3-рода) учитывается последним равенством в (3.3), где α — коэффициент теплоотдачи.

3.2. Построение общего решения задачи

Введением новой функции $W_1(r)$ выполняется условие фиксации цилиндрической поверхности пластины в вертикальной плоскости:

$$W(r, z, t) = W_1(t) + w(r, z, t). \quad (3.5)$$

Подставляя условие (3.5) в уравнения (3.1) – (3.4) становится возможным получить задачу относительно функций U, w, ϕ, Θ .

К данной задаче применяется преобразование Ханкеля [109] при использовании трансформант (3.6):

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 U(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (3.6)$$

$$\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), N_H(n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

и формул обращения (3.7):

$$U(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (3.7)$$

$$\{w(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), N_H(n, z, t)\}}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

В выражениях (3.6), (3.7) j_n — это положительные нули функции $J_1(j_n)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots; j_0 = 0$).

Для удовлетворения условий (3.2) принимается $\omega_1^*(1, t) = T_0 = \mathcal{G}^*$, что позволяет считать $\Theta(1, z, t) = 0$.

В результате получаем краевую задачу:

$$\begin{aligned} -j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + j_n N_H &= 0, \\ -a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \phi_H + a_6 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial N_H}{\partial z} &= 0, \\ j_n^2 \phi_H - a_8 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n N_H + a_{13} \frac{\partial N_H}{\partial z} &= 0, \\ -j_n^2 N_H + \frac{\partial^2 N_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[N_H + a_{14} \left(j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \right] &= 0; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$z = 0, h \quad a_{16} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - a_7 N_H = 0, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad (3.9)$$

$$\phi_H|_{z=0} = \phi_{0H}, \quad \phi_H|_{z=h} = 0, \quad N_H|_{z=0} = \omega_{1H}, \quad \left(\frac{\partial N_H}{\partial z} + a_{17} N_H \right) \Big|_{z=h} = a_{17} \mathcal{G}_H,$$

$$t = 0 \quad \{u_H, \phi_H, N_H\} = 0, \quad w_H = w_{0H}, \quad (3.10)$$

$$\text{где} \quad \{\omega_{1H}, \phi_{0H}, \mathcal{G}_H, w_{0H}\} = \int_0^1 \{\omega_1, \phi_0, \mathcal{G}, -W_1(0)\} r J_0(j_n r) dr.$$

Использование новых функций $U_H(n, z, t)$, $W_H(n, z, t)$, $\phi_H(n, z, t)$, $Q_H(n, z, t)$ на следующем этапе решения задачи позволяет привести неоднородные граничные условия (3.9) к однородным:

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad (3.11)$$

$$\phi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + \phi_H(n, z, t), \quad N_H(n, z, t) = H_4(n, z, t) + Q_H(n, z, t).$$

$$\text{Здесь} \quad \{H_1 \dots H_4\} = \{H_1^* \dots H_4^*\} + \{f_9(z) \dots f_{12}(z)\} \phi_{0H}(t),$$

$\{H_1^* \dots H_4^*\} = \{f_1(z) \dots f_4(z)\} \omega_{1H}(t) + \{f_5(z) \dots f_8(z)\} \mathcal{G}_H$, $f_1(z) \dots f_{12}(z)$ — дважды дифференцируемые функции.

Подставляя выражения (3.11) в (3.8) — (3.10) при выполнении следующих условий (3.12):

$$z = 0, h \quad a_{16} j_n H_1 + a_4 \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_6 \frac{\partial H_3}{\partial z} - a_7 H_4 = 0, \quad j_n H_2 - \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0, \quad (3.12)$$

$$H_{3|z=0} = \phi_{0H}, \quad H_{3|z=h} = 0, \quad H_{4|z=0} = \omega_{1H}, \quad \left(\frac{\partial H_4}{\partial z} + a_{17} H_4 \right)_{|z=h} = a_{17} \vartheta_H,$$

имеем возможность получить краевую задачу относительно функций $U_H(n, z, t)$,

$W_H(n, z, t)$, $\varphi_H(n, z, t)$, $Q_H(n, z, t)$:

$$-j_n^2 U_H + a_1 \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + j_n Q_H = F_1, \quad (3.13)$$

$$-a_1 j_n^2 W_H + a_4 \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \varphi_H + a_6 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial Q_H}{\partial z} = F_2,$$

$$j_n^2 \varphi_H - a_8 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 W_H + a_{11} \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n Q_H + a_{13} \frac{\partial Q_H}{\partial z} = F_3,$$

$$-j_n^2 Q_H + \frac{\partial^2 Q_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[Q_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] = F_4;$$

$$z = 0, h \quad a_{16} j_n U_H + a_4 \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - a_7 Q_H = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0, \quad (3.14)$$

$$\varphi_{H|z=0} = \varphi_{H|z=h} = 0, \quad Q_{H|z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial Q_H}{\partial z} + a_{17} Q_H \right)_{|z=h} = 0;$$

$$t = 0 \quad U_H = U_{0H}, \quad W_H = W_{0H}, \quad \varphi_H = \varphi_{0H}, \quad Q_H = Q_{0H}, \quad (3.15)$$

где

$$F_1 = j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4,$$

$$F_2 = a_1 j_n^2 H_2 - a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_5 j_n^2 H_3 - a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_7 \frac{\partial H_4}{\partial z},$$

$$F_3 = -j_n^2 H_3 + a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_{10} j_n^2 H_2 - a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_{12} j_n H_4 - a_{13} \frac{\partial H_4}{\partial z},$$

$$F_4 = j_n^2 H_4 - \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[H_4 + a_{14} \left(j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial H_3}{\partial z} \right],$$

$$U_{0H} = -H_{1|t=0}, \quad W_{0H} = w_{0H} - H_{2|t=0}, \quad \varphi_{0H} = -H_{3|t=0}, \quad Q_{0H} = -H_{4|t=0}.$$

Для решения краевой задачи (3.13) – (3.15) применяем структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) с неизвестными компонентами собственных вектор - функций ядер преобразований $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_4(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$ [106]:

$$G(n, \lambda_{in}, t) = \int_0^h \left[Q_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz, \quad (3.16)$$

$$\{U_H, W_H, \varphi_H, Q_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z), N_4(\mu_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2},$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_4(\lambda_{in}, z) N_4(\mu_{in}, z) dz,$$

где λ_{in}, μ_{in} – собственные значения краевых задач относительно сопряжённых $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент ядер КИП ($k=1 \dots 4$).

Согласно процедуре преобразования, уравнения (3.13) умножаются соответственно на $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$, $K_4(\lambda_{in}, z)$, выполняется интегрирование в интервале $[0, h]$ и складываются полученные уравнения:

$$\begin{aligned} & \Phi(U_H, W_H, \varphi_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, K_{4in}) \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + \varphi_H L_3 + Q_H L_4) dz - \\ & - \frac{\partial}{\partial t} G(n, \lambda_{in}, t) = F_H(n, \lambda_{in}, t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Начальные условия (3.15) обобщаем в следующем виде:

$$\left[Q_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right]_{t=0}, \text{ умножаем на } K_4(\lambda_{in}, z) \text{ и после интегрирования в}$$

интервале $[0, h]$ получаем:

$$t = 0 \quad G(n, \lambda_{in}, 0) = G_0(n, \lambda_{in}). \quad (3.18)$$

В равенствах (3.17), (3.18) введены обозначения:

$$\Phi(U_H, W_H, \varphi_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, K_{4in}) \Big|_0^h = \left[a_1 \frac{\partial U_H}{\partial z} - (a_2 W_H - a_3 \varphi_H) j_n \right] K_{1in} - a_1 U_H \frac{dK_{1in}}{dz} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(a_2 j_n U_H + a_4 \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - a_7 Q_H \right) K_{2in} - (a_4 W_H + a_6 \varphi_H) \frac{dK_{2in}}{dz} + \\
& + \left(a_9 j_n U_H + a_{11} \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_8 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + a_{13} Q_H \right) K_{3in} + (a_8 \varphi_H - a_{11} W_H) \frac{dK_{3in}}{dz} + \frac{\partial Q_H}{\partial z} K_{4in} - Q_H \frac{dK_{4in}}{dz}, \\
L_1 & = -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} - a_9 j_n \frac{dK_{3in}}{dz}, \\
L_2 & = a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_1 j_n^2 K_{2in} + a_4 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} - a_{10} j_n^2 K_{3in} + a_{11} \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2}, \\
L_3 & = -a_3 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{2in} + a_6 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + j_n^2 K_{3in} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2}, \\
L_4 & = j_n K_{1in} + a_7 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{12} j_n K_{3in} - a_{13} \frac{dK_{3in}}{dz} - j_n^2 K_{4in} + \frac{d^2 K_{4in}}{dz^2}, \\
F_H(n, \lambda_{in}, t) & = \int_0^h (F_{1H} K_{1in} + F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_{3in} + F_{4H} K_{4in}) dz, \\
G_{0H} & = \int_0^h \left[Q_{0H} + a_{14} \left(j_n U_{0H} + \frac{\partial W_{0H}}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_{0H}}{\partial z} \right] K_{4in} dz.
\end{aligned}$$

Использование операционного свойства (3.19) позволяет получить задачу относительно трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$ (3.20), (3.21):

$$\begin{aligned}
\Phi(U_H, W_H, \varphi_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, K_{4in}) \Big|_0^h + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + \varphi_H L_4 + Q_H L_3) dz = \\
= -\lambda_{in}^2 \int_0^h \left[Q_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] K_4 dz,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda_{in}^2 \right) G(n, \lambda_{in}, t) = -F_H(n, \lambda_{in}, t), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots), \tag{3.20}$$

$$t = 0 \quad G(n, \lambda_{in}, 0) = G_{0H}. \tag{3.21}$$

Для правой части уравнения (3.19) выполним преобразование:

$$\begin{aligned}
& \left[\Phi(U_H, W_H, \varphi_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) + \lambda_{in}^2 (a_{14} W_H - a_{15} \varphi_H) K_{4in} \right] \Big|_0^h + \\
& + \int_0^h (U_H L_1 + W_H L_2 + \varphi_H L_4 + Q_H L_3) dz =
\end{aligned}$$

$$= -\lambda_{in}^2 \int_0^h \left[(Q_H + a_{14} j_n U_H) K_{4in} - (a_{14} W_H - a_{15} \varphi_H) \frac{dK_{4in}}{dz} \right] dz,$$

учитывая условия об отсутствии внеинтегральных членов:

$$\left[\Phi(U_H, W_H, Q_H, K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}) + \lambda_{in}^2 (a_{14} W_H - a_{15} \varphi_H) K_{4in} \right]_0^h = 0,$$

и при учёте граничных условий (3.14), получаем краевую задачу относительно ядер преобразования $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_4(\lambda_{in}, z)$:

$$\begin{aligned} -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} - a_9 j_n \frac{dK_{3in}}{dz} + \lambda_{in}^2 a_{14} j_n K_{4in} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 K_{2in} + a_4 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 K_{3in} + a_{11} \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - \lambda_{in}^2 a_{14} \frac{dK_{4in}}{dz} &= 0, \\ j_n^2 K_{3in} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - a_3 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{2in} + a_6 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + \lambda_{in}^2 a_{15} \frac{dK_{4in}}{dz} &= 0, \\ (\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_{4in} + \frac{d^2 K_{4in}}{dz^2} + j_n K_{1in} + a_7 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{12} j_n K_{3in} - a_{13} \frac{dK_{3in}}{dz} &= 0; \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} z=0, h \quad a_{16} j_n K_{1in} + a_4 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{11} \frac{dK_{3in}}{dz} - \lambda_{in}^2 a_{15} K_{4in} &= 0, \quad K_{3in|z=0} = K_{3in|z=h} = 0, \\ \frac{dK_{1in}}{dz} - j_n K_{2in} &= 0, \quad K_{4in|z=0} = 0, \quad \left(\frac{dK_{4in}}{dz} + a_{17} K_{4in} \right)_{|z=h} = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Применяя далее к (3.22) КИП с неизвестными компонентами ядра $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$. Для этого умножаем уравнения (3.22) соответственно на функции $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$, интегрируем в интервале $[0, h]$ и, складывая полученные уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, K_{4in}, N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}, N_{4in}) \Big|_0^h + \int_0^h (K_{1in} L_5 + K_{2in} L_6 + K_{3in} L_7 + K_{4in} L_8) dz + \\ + \lambda_{in}^2 \int_0^h \left[N_{4in} + a_{14} \left(j_n N_{1in} + \frac{dN_{2in}}{dz} \right) - a_{15} \frac{dN_{3in}}{dz} \right] K_{4in} dz &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, K_{4in}, N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}, N_{4in}) \Big|_0^h = & \left(a_1 \frac{dK_{1in}}{dz} - a_2 j_n K_{2in} - a_9 j_n K_{3in} \right) N_{1in} - \\ - a_1 K_{1in} \frac{dN_{1in}}{dz} + & \left(a_4 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_2 j_n K_{1in} + a_{11} \frac{dK_{3in}}{dz} - \lambda_{in}^2 a_{14} K_{4in} \right) N_{2in} - \\ - (a_4 K_{2in} + a_{11} K_{3in}) \frac{dN_{2in}}{dz} + & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(a_6 \frac{dK_{2in}}{dz} + \lambda_{in}^2 a_{15} K_{4in} - a_8 \frac{dK_{3in}}{dz} - a_3 j_n K_{1in} \right) N_{3in} + (K_{3in} - a_6 K_{2in}) \frac{dN_{3in}}{dz} + \\
& + \left(\frac{dK_{4in}}{dz} + a_7 K_{2in} - a_{13} K_{3in} \right) N_{4in} - K_{4in} \frac{dN_{4in}}{dz}, \\
L_5 & = -j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + a_3 j_n \frac{dN_{3in}}{dz} + j_n N_{4in}, \quad L_8 = -j_n^2 N_{4in} + \frac{d^2 N_{4in}}{dz^2}, \\
L_6 & = a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_1 j_n^2 N_{2in} + a_4 \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} - a_5 j_n^2 N_{3in} + a_6 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} - a_7 \frac{dN_{4in}}{dz}, \\
L_7 & = a_9 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 N_{2in} + a_{11} \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + j_n^2 N_{3in} - a_8 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + a_{12} j_n N_{4in} + a_{13} \frac{dN_{4in}}{dz}.
\end{aligned}$$

Здесь также используется операционное свойство:

$$\begin{aligned}
& \int_0^h (K_{1in} L_5 + K_{2in} L_6 + K_{3in} L_7 + K_{4in} L_8) dz = \\
& = -\mu_{in}^2 \int_0^h \left[N_{4in} + a_{14} \left(j_n N_{1in} + \frac{dN_{2in}}{dz} \right) - a_{15} \frac{dN_{3in}}{dz} \right] K_{4in} dz,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

и условие равенства нулю внеинтегральных членов:

$$\left[\tilde{\Phi}(K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}, K_{4in}, N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}, N_{4in}) + \mu_{in}^2 (a_{14} K_{2in} - a_{15} K_{3in}) N_{4in} \right]_0^h = 0, \tag{3.26}$$

что позволяет сформулировать задачу относительно компонент ядра $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$:

$$\begin{aligned}
& -j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + a_3 j_n \frac{dN_{3in}}{dz} + j_n N_{4in} = 0, \\
& -a_1 j_n^2 N_{2in} + a_4 \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 N_{3in} + a_6 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} - a_7 \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\
& j_n^2 N_{3in} - a_8 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + a_9 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 N_{2in} + a_{11} \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_{12} j_n N_{4in} + a_{13} \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\
& -j_n^2 N_{4in} + \frac{d^2 N_{4in}}{dz^2} + \mu_{in}^2 \left(N_{4in} + a_{14} j_n N_{1in} + a_{14} \frac{dN_{2in}}{dz} - a_{15} \frac{dN_{3in}}{dz} \right) = 0;
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$z = 0, h \quad a_{16} j_n N_{1in} + a_4 \frac{dN_{2in}}{dz} + a_6 \frac{dN_{3in}}{dz} - a_7 N_{4in} = 0, \quad \frac{dN_{1in}}{dz} - j_n N_{2in} = 0, \tag{3.28}$$

$$N_{3in|z=0} = N_{3in|z=h} = 0, \quad N_{4in|z=0} = 0, \quad \left(\frac{dN_{4in}}{dz} + a_{17} N_{4in} \right)_{|z=h} = 0.$$

Построенная однородная задача (3.27), (3.28) относительно функций $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$ инвариантна исходным расчётным соотношениям (3.13), (3.14).

Общее решение задач для трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$ (3.20), (3.21) имеет вид:

$$G(n, \lambda_{in}, t) = G_{0H} \exp(-\lambda_{in}^2 t) - \int_0^t F_H(n, \lambda_{in}, \tau) \exp[\lambda_{in}^2 (\tau - t)] d\tau. \quad (3.29)$$

Системы (3.22), (3.27) приводятся к следующим уравнениям относительно $K_2(\lambda_{in}, z)$, $N_2(\mu_{in}, z)$:

$$\left(\frac{d^8}{dz^8} + e_{1in} \frac{d^6}{dz^6} + e_{2in} \frac{d^4}{dz^4} + e_{3in} \frac{d^2}{dz^2} + e_{4in} \right) \{K_{2in}, N_{2in}\} = 0. \quad (3.30)$$

Здесь:

— для уравнения относительно $K_2(\lambda_{in}, z)$:

$$e_{1in} = e_{0in} [a_2 (b_{10} b_{18in} - b_{12} b_{16in}) + b_{17in} (b_7 b_{14in} + a_2 b_{11n} - b_{9in} b_{10}) - b_{15in} (b_8 b_{14in} + a_2 b_{13n} - b_{9in} b_{12})],$$

$$e_{2in} = e_{0in} [a_2^2 b_{6in} (b_{10} b_{13n} - b_{11n} b_{12}) + (b_7 b_{14in} + a_2 b_{11n} - b_{9in} b_{10}) (a_2 b_{6in} b_{12} + b_{18in}) - (a_1 b_{14in} j_n^2 + b_{9in} b_{11n}) b_{17in} - \\ - (b_8 b_{14in} + a_2 b_{13n} - b_{9in} b_{12}) (a_2 b_{6in} b_{10} + b_{16in}) + (a_{10} b_{14in} j_n^2 + b_{9in} b_{13n}) b_{15in}],$$

$$e_{3in} = e_{0in} [(b_7 b_{13n} b_{14in} - b_8 b_{11n} b_{14in} - b_{9in} b_{10} b_{13n} + b_{9in} b_{11n} b_{12}) a_2 b_{6in} + (a_{10} b_{14in} j_n^2 + b_{9in} b_{13n}) (a_2 b_{6in} b_{10} + b_{16in}) - \\ - (a_1 b_{14in} j_n^2 + b_{9in} b_{11n}) (a_2 b_{6in} b_{12} + b_{18in})],$$

$$e_{4in} = e_{0in} (a_{10} b_{11n} - a_1 b_{13n}) a_2 b_{6in} b_{14in} j_n^2, \quad e_{0in} = [a_2 (b_{10} b_{17in} - b_{12} b_{15in})]^{-1},$$

$$b_1 = -a_1 a_7, \quad b_{2n} = (a_7 - a_2) j_n^2, \quad b_3 = a_1 a_{13}, \quad b_{4n} = -(a_{13} + a_9) j_n^2, \quad b_{5in} = j_n^2 - a_1 (\lambda_{in}^2 - j_n^2),$$

$$b_{6in} = (1 + a_{15}) \lambda_{in}^2 j_n^2 - j_n^4, \quad b_7 = (a_4 - a_2 a_7), \quad b_8 = (a_2 a_{13} + a_{11}), \quad b_{9in} = -\lambda_{in}^2 (a_2 + a_{14}) + a_2 j_n^2,$$

$$b_{10} = (a_3 a_4 + a_2 a_6), \quad b_{11n} = -(a_1 a_3 + a_2 a_5) j_n^2, \quad b_{12} = (a_3 a_{11} - a_2 a_8), \quad b_{13n} = (a_2 - a_3 a_{10}) j_n^2,$$

$$b_{14in} = \lambda_{in}^2 (a_2 a_{15} - a_3 a_{14}), \quad b_{15in} = b_{10} (a_2 b_{5in} - a_1 b_{9in}) - b_{14in} (a_2 b_1 - a_1 b_7),$$

$$b_{16in} = b_{11n} (a_2 b_{5in} - a_1 b_{9in}) - b_{14in} (a_2 b_{2n} + a_1^2 j_n^2), \quad b_{17in} = b_{12} (a_2 b_{5in} - a_1 b_{9in}) - b_{14in} (a_2 b_3 - a_1 b_8),$$

$$b_{18in} = b_{13n} (a_2 b_{5in} - a_1 b_{9in}) - b_{14in} (a_2 b_{4n} + a_1 a_{10} j_n^2);$$

— для уравнения относительно $N_2(\mu_{in}, z)$:

$$e_{1in} = e_{0in} \{ (b_{22in} + b_{7in} b_{12in} b_{16}) b_{12in} b_{14} + b_{21in} [b_{12in} b_{15n} - (b_8 b_{18} - b_{13in} b_{14})] \} -$$

$$\begin{aligned}
& -\{(b_{20in} + b_{7in}b_{12in}b_{14})b_{12in}b_{16} + b_{19in}[b_{12in}b_{17n} - (b_{10}b_{18} - b_{13in}b_{16})]\}, \\
e_{2in} &= e_{0in}\{b_{7in}b_{12in}^2b_{14}b_{17} + (b_{22in} + b_{7in}b_{12in}b_{16})[b_{12in}b_{15n} - (b_8b_{18} - b_{13in}b_{14})] - (b_{9n}b_{18} - b_{13in}b_{15n})b_{21in}\} - \\
& -\{b_{7un}b_{12in}^2b_{16}^2 + (b_{20in} + b_{7in}b_{12in}b_{14})[b_{12in}b_{17n} - (b_{10}b_{18} - b_{13in}b_{16})] - b_{19in}(b_{11n}b_{18} - b_{13in}b_{17n})\}, \\
e_{3in} &= e_{0in}\{b_{7in}b_{12in}b_{17n}[b_{12in}b_{15n} - (b_8b_{18} - b_{13in}b_{14})] - (b_{9n}b_{18} - b_{13in}b_{15n})(b_{22in} + b_{7in}b_{12in}b_{16})\} - \\
& -\{b_{7in}b_{12in}b_{15n}[b_{12in}b_{17n} - (b_{10}b_{18} - b_{13in}b_{16})] - (b_{20in} + b_{7in}b_{12in}b_{14})(b_{11n}b_{18} - b_{13in}b_{17n})\}, \\
e_{4in} &= e_{0in}b_{7in}b_{12in}b_{18}(b_{11n}b_{15n} - b_{9n}b_{17n}), \quad e_{0in} = [b_{12in}(b_{14}b_{21in} - b_{16}b_{19in})]^{-1}, \\
b_1 &= a_1a_{15}, \quad b_{2n} = (a_2 - 1)a_{15}j_n^2, \quad b_3 = -a_1a_{16}, \quad b_{4n} = (a_{16} - a_3a_{15})j_n^2, \quad b_{5in} = a_1\mu_{in}^{-2}, \\
b_{6in} &= a_1 - \mu_{in}^{-2}(a_1 + 1)j_n^2, \quad b_{7in} = \mu_{in}^{-2}j_n^4 - (a_{15} + 1)j_n^2, \quad b_8 = (a_4 - a_2)a_{14}, \quad b_{9n} = -a_1a_{14}j_n^2, \\
b_{10} &= a_6a_{14} + a_2a_{15}, \quad b_{11n} = -a_5a_{14}j_n^2, \quad b_{12in} = -a_2\mu_{in}^{-2}, \quad b_{13in} = a_2(\mu_{in}^{-2}j_n^2 - 1) - a_7a_{14}, \\
b_{14} &= a_4a_9 - a_2a_{11}, \quad b_{15n} = (a_2a_{10} - a_1a_9)j_n^2, \quad b_{16} = (a_6a_9 + a_2a_8), \quad b_{17n} = -(a_5a_9 + a_2)j_n^2, \\
b_{18} &= -(a_7a_9 + a_2a_{13}), \quad b_{19in} = b_{14}(b_{6in}b_{12in} - b_{5in}b_{13in}) - b_{18}(b_1b_{12in} - b_{5in}b_8), \\
b_{20in} &= b_{15n}(b_{6in}b_{12in} - b_{5in}b_{13in}) - b_{18}(b_{2n}b_{12in} - b_{5in}b_{9n}), \\
b_{21in} &= b_{16}(b_{6in}b_{12in} - b_{5in}b_{13in}) - b_{18}(b_3b_{12in} - b_{5in}b_{10}), \\
b_{22in} &= b_{17n}(b_{6in}b_{12in} - b_{5in}b_{13in}) - b_{18}(b_{4n}b_{12in} - b_{5in}b_{11n}).
\end{aligned}$$

В уравнении (3.30) левую часть разложим на коммутативные сомножители (3.31):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - A_{1in}^2\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} + A_{2in}^2\right)\left(\frac{d^4}{dz^4} + m_{3in}^2\frac{d^2}{dz^2} + m_{4in}^2\right)\{K_{2in}, N_{2in}\} = 0, \quad (3.31)$$

где $A_{1in} = \sqrt{B_{1in}}, \quad A_{2in} = \sqrt{S_{1in}}, \quad m_{3in}^2 = e_{1in} + B_{1in} + S_{1in}, \quad m_{4in}^2 = \frac{e_{4in}}{B_{1in}S_{2in}},$

B_{1in}, S_{1in} – действительные положительные корни характеристических уравнений, представленные далее:

$$B_{in}^4 + e_{1in}B_{in}^3 + e_{2in}B_{in}^2 + e_{3in}B_{in} + e_{4in} = 0,$$

$$S_{in}^3 - (e_{1in} + B_{1in})S_{in}^2 + (e_{1in}B_{1in} + B_{1in}^2 + e_{2in})S_{in} - \frac{e_{4in}}{B_{1in}} = 0.$$

Здесь следует отметить, что для большинства пьезоэлектрических материалов коэффициенты $B_{1in}, S_{1in}, A_{1in} \dots A_{4in}$ будут действительные и положительные. При наличии комплексно-сопряжённых полей просто меняется структура ниже построенных равенств.

Общий интеграл уравнений (3.31) имеет вид:

$$\begin{aligned} \{K_{2in}, N_{2in}\} = & \{D_{1in}, E_{1in}\} \exp(A_{1in}z) + \{D_{2in}, E_{2in}\} \exp(-A_{1in}z) + \{D_{3in}, E_{3in}\} \sin(A_{2in}z) + \\ & + \{D_{4in}, E_{4in}\} \cos(A_{2in}z) + \{D_{5in}, E_{5in}\} \sin(A_{3in}z) + \{D_{6in}, E_{6in}\} \cos(A_{3in}z) + \\ & + \{D_{7in}, E_{7in}\} \sin(A_{4in}z) + \{D_{8in}, E_{8in}\} \cos(A_{4in}z), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где
$$A_{3in} = \left(\frac{m_{3in}^2 + \sqrt{m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2}}{2} \right)^{0.5}, \quad A_{4in} = \left(\frac{m_{3in}^2 - \sqrt{m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2}}{2} \right)^{0.5}.$$

Наличие выражения (3.32) позволяет с помощью (3.22), (3.27) получить выражения для функций $K_1(\lambda_{in}, z), K_3(\lambda_{in}, z), K_4(\lambda_{in}, z), N_1(\lambda_{in}, z), N_3(\lambda_{in}, z), N_4(\lambda_{in}, z)$ определить постоянные интегрирования $D_{1in} \dots D_{8in}, E_{1in} \dots E_{8in}$ и собственные значения λ_{in}, μ_{in} из условий (3.23), (3.28).

Выражения функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)$ в окончательной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U(r, z, t) = & 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\ W(r, z, t) = & W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\ \phi(r, z, t) = & 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\ \Theta(r, z, t) = & 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ранее введённая неизвестная функция $W_1(t)$, обеспечивающая закрепление цилиндрической поверхности пластины от перемещений в вертикальной плоскости, определяется из условия $W(1, h, t) = 0$ и имеет следующий вид:

$$W_1(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[H_2(n, h, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, h) \|K_i\|^{-2} \right] J_0(j_n)^{-1},$$

а $H_1(z) \dots H_4(z) (f_1(z) \dots f_{12}(z))$ определяются путём упрощения уравнений (3.13):

$$j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4 = 0,$$

$$a_1 j_n^2 H_2 - a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_5 j_n^2 H_3 - a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_7 \frac{\partial H_4}{\partial z} = 0,$$

$$-j_n^2 H_3 + a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_{10} j_n^2 H_2 - a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_{12} j_n H_4 - a_{13} \frac{\partial H_4}{\partial z} = 0,$$

$$j_n^2 H_4 - \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} = 0,$$

а также удовлетворении условий (3.12).

На верхней лицевой поверхности пластины размещаем два электрода с радиусом раздела R , которые подключены к измерительному прибору. Тогда выражение для потенциала $\phi_0(r, t)$ представляется в следующем виде:

$$\phi_0(r, t) = \phi_{01}(t) H(R - r) + \phi_{02}(t) H(r - R). \quad (3.34)$$

Каждый потенциал $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ на двух эквипотенциальных поверхностях определяется при решении следующих равенств:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^R D_{z|z=0} r dr = \frac{\partial}{\partial t} \int_R^1 D_{z|z=0} r dr = 0, \quad (3.35)$$

а также с учётом условия, что температура ϑ^* принимается равной температуре T_0 ($\vartheta = 0$), следующим образом:

$$\phi_{01}(t) = Q_{01}^{-1} [Q_1(t) + Q_2(t) + Q_3(t)], \quad \phi_{02}(t) = Q_{02}^{-1} \left[-Q_1(t) + \frac{1-R^2}{R^2} Q_2(t) + Q_4(t) \right], \quad (3.36)$$

$$\text{где } Q_1(t) = R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n R)}{J_0(j_n)^2} \left\{ \frac{a_{10}}{a_5} H_1^*(n, 0, t) + \frac{a_{11}}{j_n} \frac{\partial H_2^*(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{a_8}{j_n} \frac{\partial H_3^*(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(0, \lambda_{in}, t)}{\|K_{in}\|^2} \left[\frac{a_{10}}{a_5} N_1(\lambda_{in}, 0) + \frac{a_{11}}{j_n} \frac{dN_2(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=0} - \frac{a_8}{j_n} \frac{dN_3(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right\},$$

$$Q_2(t) = R^2 \left[a_{11} \frac{\partial H_2^*(0, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{\partial H_3^*(0, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(0, \lambda_{i0}, t)}{\|K_{i0}\|^2} \left[a_{11} \frac{dN_2(\lambda_{i0}, z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{dN_3(\lambda_{i0}, z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right],$$

$$Q_3(t) = a_{13} \int_0^R \omega_1(r, t) r dr, \quad Q_4(t) = a_{13} \int_R^1 \omega_1(r, t) r dr,$$

$$Q_{01} = - \left\{ \frac{R^4}{2} \left[a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] + 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(j_n R)}{j_n^2 J_0(j_n)} \right]^2 \left[\frac{a_{10}}{a_5} j_n f_9(0) + a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right\},$$

$$Q_{02} = - \left\{ \frac{(1-R^2)^2}{2} \left[a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] + 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(j_n R)}{j_n^2 J_0(j_n)} \right]^2 \left[\frac{a_{10}}{a_5} j_n f_9(0) + a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right\}.$$

Равенством (3.37) определяется разность потенциалов $V(t)$:

$$V(t) = \phi_{01}(t) - \phi_{02}(t). \quad (3.37)$$

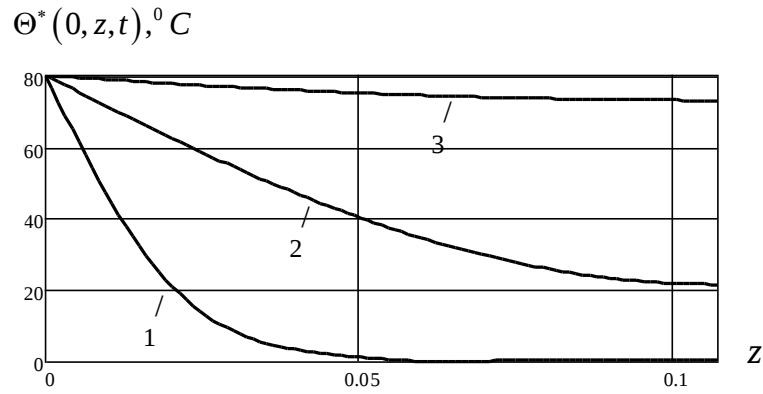
3.3. Численный анализ результатов исследуемой задачи

Для выполнения численного анализа задачи принимается сплошная круглая пластина ($b = 14 \times 10^{-3}$ м, $h^* = 1.5 \times 10^{-3}$ м), изготовленная из пьезокерамических составов PZT-4 и PZT-5A (см. табл. 2.1). Температура изменяется на её верхней лицевой поверхности согласно зависимости (2.57). Температура ϑ^* принимается равной температуре T_0 ($\vartheta = 0$, $\alpha = 5.6$ Вт/(м² К)).

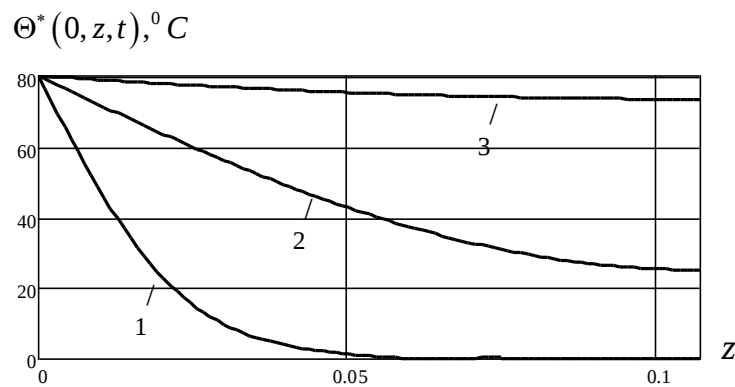
Для наиболее эффективного преобразования внешнего температурного воздействия (2.57) в электрический импульс (3.37) радиус раздела электродов равен $R = 0.55$. Здесь удаётся уточнить размеры электродов, по сравнению с приближённым решением, полученным в главе 2, где $R = 0.6$.

На рис. 3.2 представлены графики $\Theta^*(0, z, t) - z$ в различные моменты времени ($t_{\max}^* = 0.1$ с, $t_{\max} = \frac{\Lambda}{kb^2} t_{\max}^*$): 1: $t = t_{\max}$; 2: $t = 10 t_{\max}$; 3: $t = 80 t_{\max}$.

Установившийся температурный режим, согласно результатам расчётов, формируется достаточно быстро (время $t_* = 8$ с), с достижением $\Theta^*(0, h, 80 t_{\max})$ на нижней лицевой поверхности ($z = h$) 74 °С (рис. 3.2). Такой показатель объясняется высокими значениями коэффициентов теплопроводности (см. таблицу 2.1) применяемых материалов PZT-4 и PZT-5A и небольшой толщиной пластины.



а) состав PZT-4

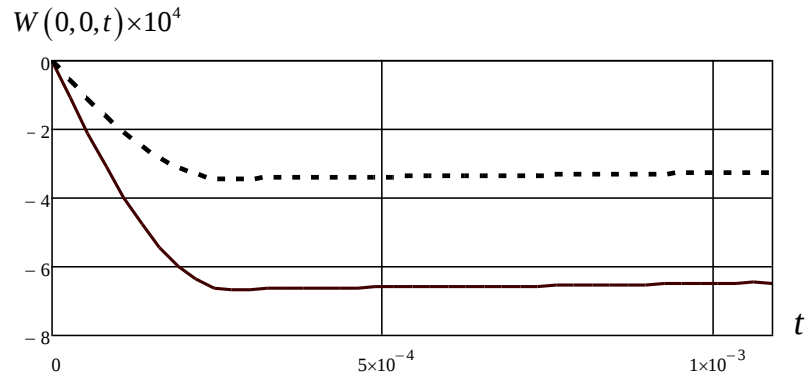


б) состав PZT-5A

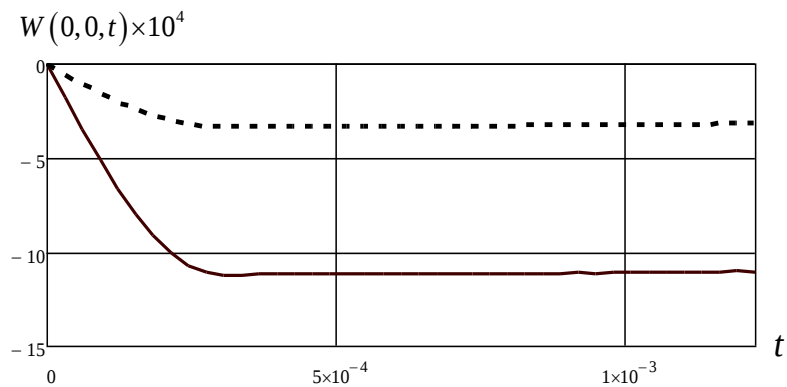
Рис. 3.2. Изменение $\Theta(0, z, t)$
по высоте пластины, 1: $t = t_{max}$; 2: $t = 10 t_{max}$; 3: $t = 80 t_{max}$

Численные результаты, связанные с определением $\Theta^*(r, z, t)$ показывают, что при исследовании пьезокерамических структур влиянием скорости изменения объёма тела и напряжения на температурное поле можно пренебречь, т. е. в расчётах использовать только уравнение теплопроводности.

Изменение $W(0, 0, t)$ и $U(0.5, 0, t)$ по времени t представлены на графиках на рис. 3.3, 3.4. Сплошной линией обозначены результаты при подключении образца к измерительному прибору ($\phi(r, 0, t) = \phi_0(r, t), \phi(r, h, t) = 0$) и пунктирной — при короткозамкнутых электродированных поверхностях ($\phi(r, 0, t) = \phi(r, h, t) = 0$). На рис. 3.5 показано изменение $\{W(0, z, t), U(0.5, z, t)\} - z$ в пластине состава PZT-4 (1: $t = t_{max}$; 2: $t = 10 t_{max}$; 3: $t = 80 t_{max}$).



а) состав PZT-4



б) состав PZT-5A

Рис. 3.3. Изменение $W(0,0,t)$ по времени t

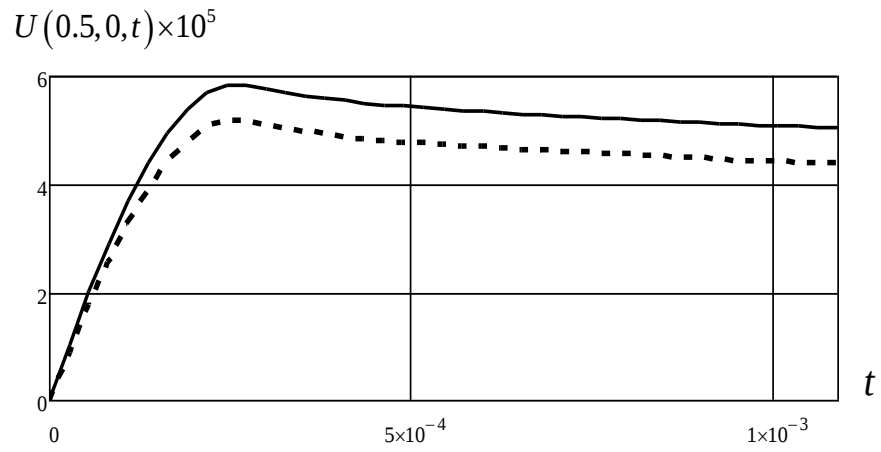
Представленные на рис. 3.3 – 3.5 зависимости позволяют сделать выводы:

– наличие короткозамкнутых электродированных лицевых поверхностей, т.е. использование дополнительных связей, приводит к образованию более жёсткой системы и уменьшению перемещений;

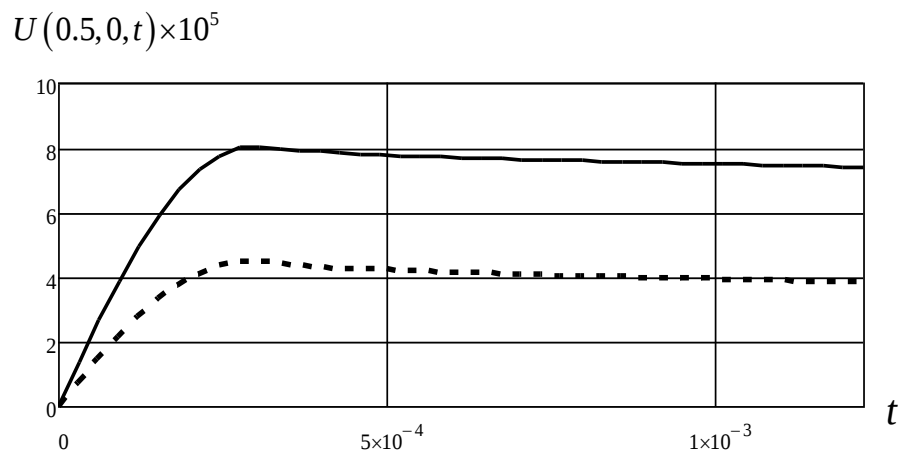
– в процессе неравномерного прогрева пластина изгибается с увеличением её толщины. При этом в более «жёсткой» пластине (см. табл. 2.1), выполненной из пьезокерамики состава PZT-4, перемещения существенно меньше по сравнению с элементом, который изготовлен из состава PZT-5A;

– наибольшие перемещения в конструкции образуются при достижении температурной «нагрузки» максимального значения $t=t_{max}$. В дальнейшем, в процессе прогрева системы, вертикальные перемещения во всей конструкции и

горизонтальные перемещения в верхней её части ($0 \leq z < h/2$) уменьшаются, а в нижней части $U(0.5, z, t)$ – увеличиваются.



а) состав PZT-4



б) состав PZT-5A

Рис. 3.4. Изменение $U(0.5, 0, t)$ по времени t

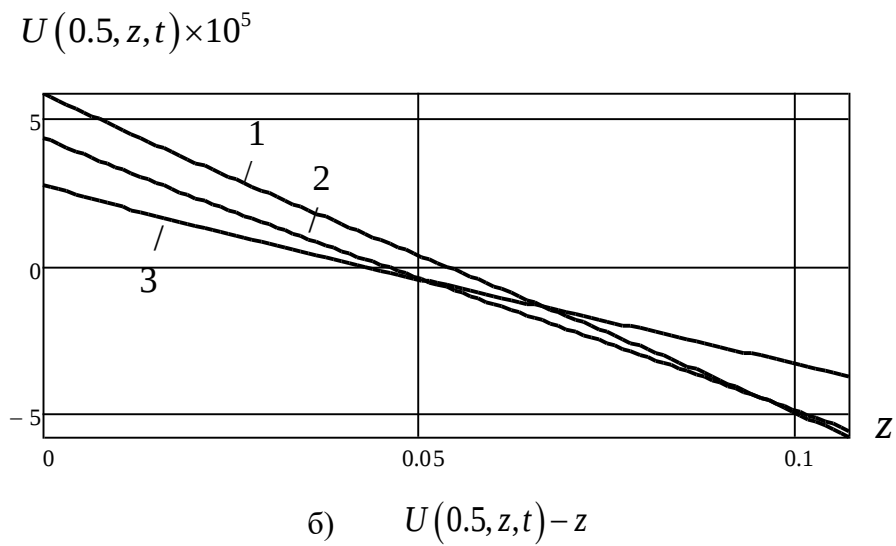
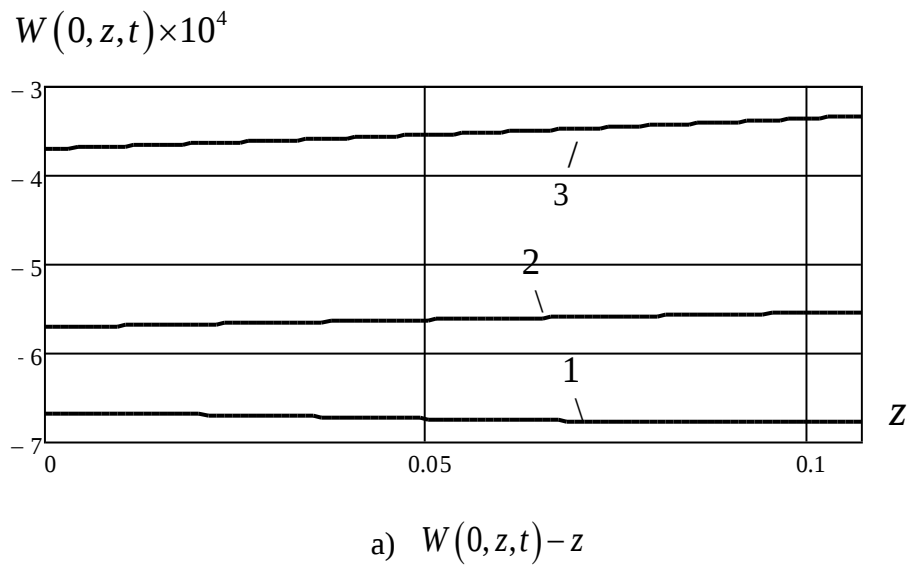


Рис. 3.5. Изменение $\{W(0, z, t), U(0.5, z, t)\} - z$,

1: $t = t_{max}$; 2: $t = 10 t_{max}$; 3: $t = 80 t_{max}$

На рис. 3.6 приведены графики $\sigma_{rr}(r, z, t) - r$ при $t = 80 t_{max}$. Сплошной и пунктирной линией обозначены результаты для верхней ($z = 0$) и нижней ($z = h$) лицевой поверхности пластины.

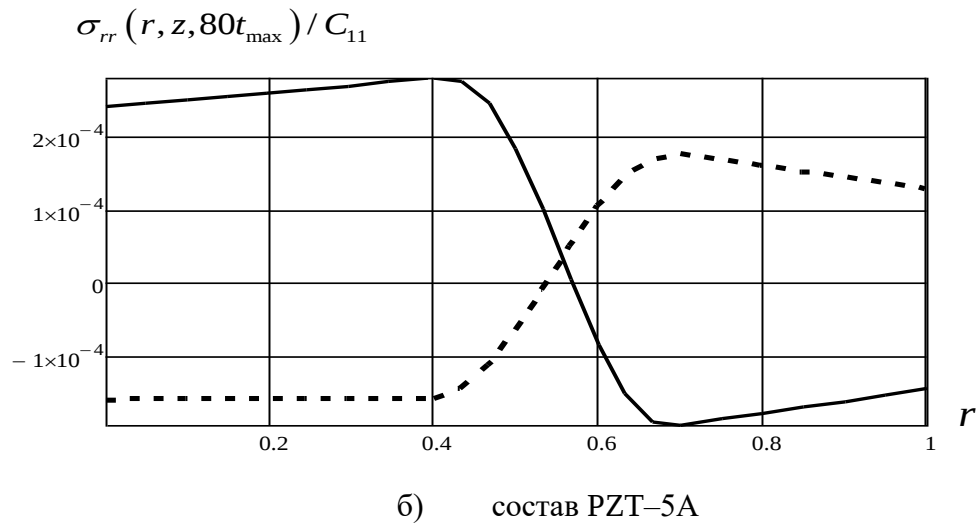
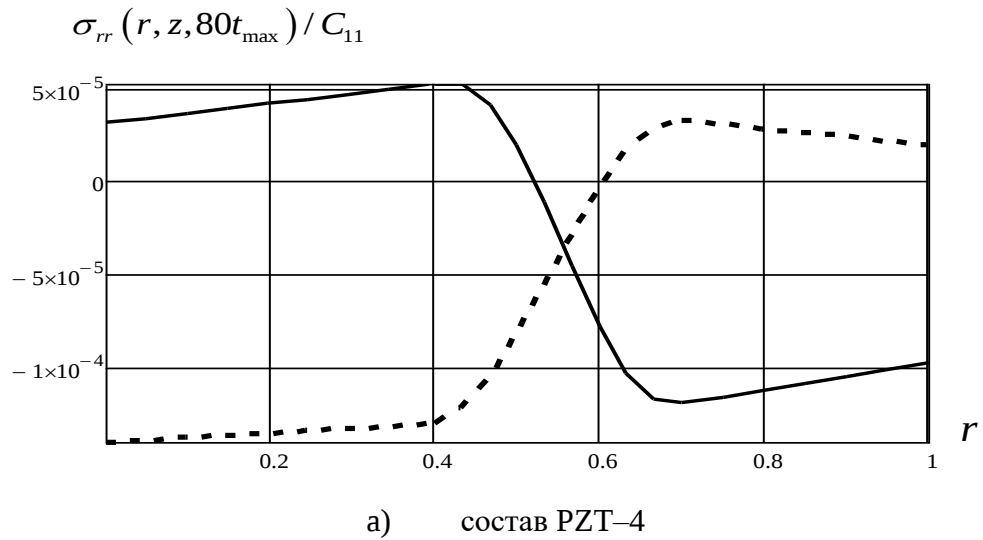


Рис. 3.6. Изменение $\sigma_{rr}(r, z, t)$
по радиальной координате при $t=80 t_{\max}$

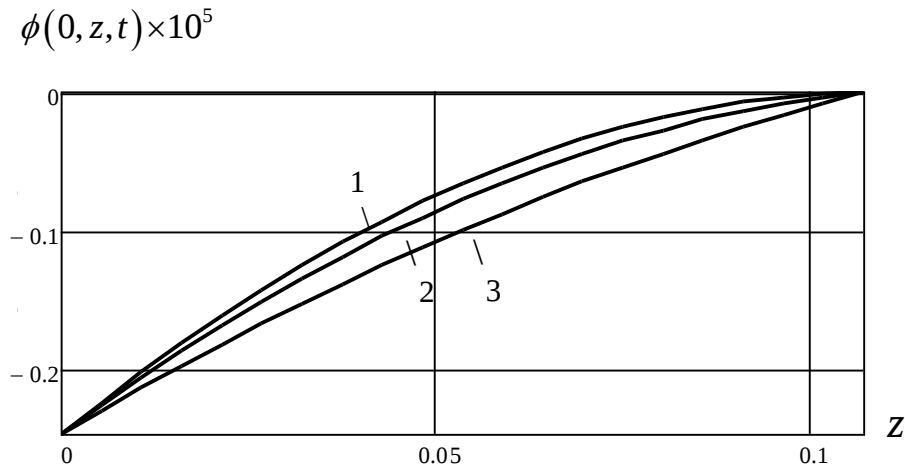
Здесь следует отметить:

- в результате прогрева конструкции, за счёт теплового расширения и условий закрепления, пластина изгибается и на поверхностях наблюдаются зоны растягивающих и сжимающих напряжений. При этом скачок в численных значениях при $R=0.55$ определяется наличием двух электродов, на которых индуцируется электрический потенциал разных знаков;

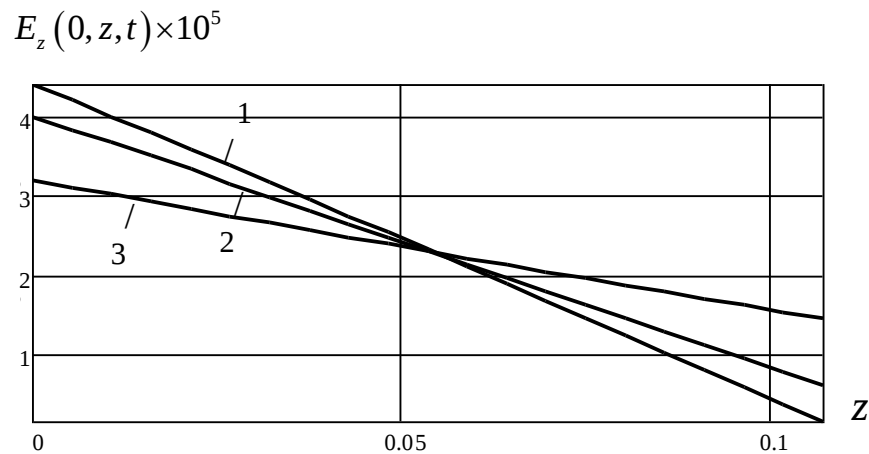
- в пластине состава PZT-4 растягивающие напряжения на верхней поверхности при $0 \leq r \leq 0.5$ ниже соответствующих сжимающих напряжений на

нижней плоскости. Обратная картина наблюдается при использовании состава PZT–5A.

Графики изменения потенциала $\phi(0, z, t)$ и напряжённости электрического поля $E_z(0, z, t)$ в безразмерной форме по аксиальной координате представлены на рис. 3.7 (1: $t = t_{max}$, 2: $t = 10 t_{max}$, 3: $t = 80 t_{max}$).



а) $\phi(0, z, t) - z$



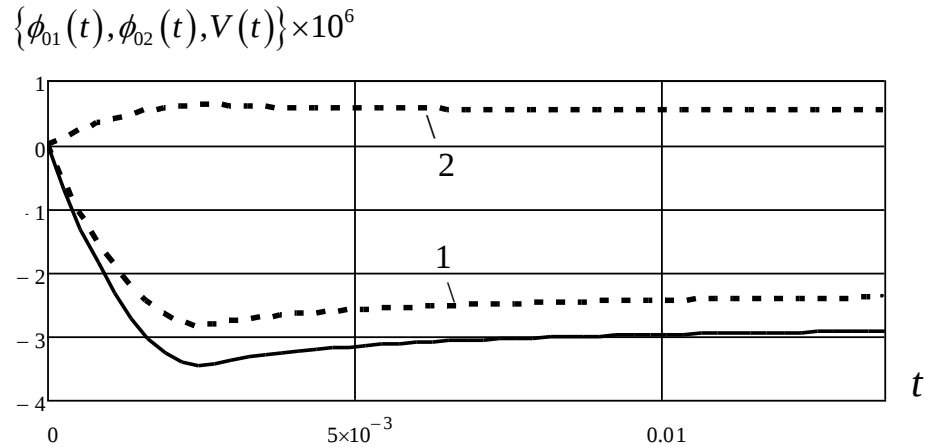
б) $E_z(0, z, t) - z$

Рис. 3.7. Изменение $\phi(0, z, t)$ и $E_z(0, z, t)$
по аксиальной координате (пьезокерамический состав PZT–4),
1: $t = t_{max}$, 2: $t = 10 t_{max}$, 3: $t = 80 t_{max}$

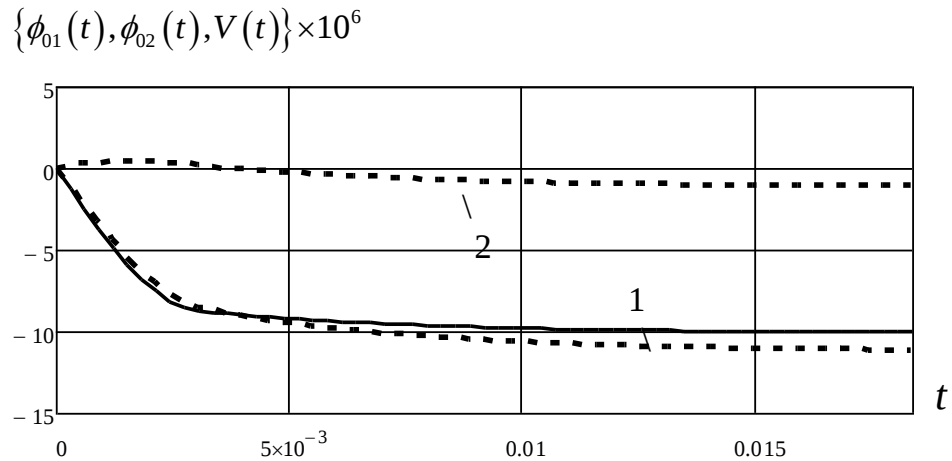
По результатам проведенного расчёта делаем вывод, что прогрев элемента приводит к снижению вертикальных перемещений и уменьшению напряжённости

электрического поля, а изменение потенциала по высоте пластины стремится к линейной зависимости.

На рис. 3.8 приведены графики изменения потенциалов $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ на электродных покрытиях и $V(t)$ по времени. Позициями 1, 2 обозначены результаты для $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$, а сплошной линией – $V(t)$.



а) состав PZT-4



б) состав PZT-5A

Рис. 3.8. Изменение $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ и разности потенциалов $V(t)$ по времени

Здесь можно отметить:

– при использовании пьезокерамического состава PZT-4 и формировании двух электродов с радиусом раздела $R=0.55$ возможно получить потенциалы на электродах разных знаков. При этом в пьезокерамике средней жёсткости (рис.3.8,

а), при достижении температурной нагрузки наибольших значений $t=t_{\max}$, наблюдается скачок электрического напряжения $V(t)$ с последующим его уменьшением во времени;

– использование более мягкой пьезокерамики состава PZT–5А характеризуется образованием на лицевых электродах электрических потенциалов $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ при $t > t_{\max}$ одного знака. Отмечается изменение численных значений $\phi_{01}(t), \phi_{02}(t)$ и $V(t)$ по мере прогревания пластины. Однако здесь также целесообразно использовать два электрода с $R=0.55$ с заземлением второго электрода;

– в пластине, изготовленной из более мягкой пьезокерамики PZT–5А, величина $V(t)$ существенно выше, что объясняется большими перемещениями по сравнению с элементом состава PZT–4;

– использование сплошного электродного покрытия позволяет определить потенциал электрического поля с помощью следующей зависимости:

$$\phi_{01}(t) = \frac{2[Q_5(t) + Q_3(t) + Q_4(t)]}{\left[a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} - a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \right]_{|z=0}},$$

$$Q_5(t) = \left[a_{11} \frac{\partial H_2^*(0, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{\partial H_3^*(0, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(0, \lambda_{i0}, t)}{\|K_{i0}\|^2} \left[a_{11} \frac{dN_2(\lambda_{i0}, z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{dN_3(\lambda_{i0}, z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right].$$

При этом величина потенциала $\phi_{01}(t)$ будет на порядок меньше соответствующей величины в случае использования двух электродов.

В заключение следует отметить, что основным преимуществом замкнутого решения связанной задачи термоэлектроупругости, по сравнению с аналогичными результатами в несвязанной постановке, является точный учёт влияния нестационарного температурного поля на индуцируемое электрическое поле.

Фрагмент автоматизированного программного расчёта в среде Mathcad-15.0, выполненный по результатам исследования задачи, приведён в Приложении 3.

ГЛАВА 4. СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛОЙ СПЛОШНОЙ ОДНОСЛОЙНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ

4.1. Постановка исследуемой задачи

В настоящей главе рассматривается случай изменения температуры на верхней лицевой $\omega_1^*(r_*, t_*)$ и на цилиндрической $\omega_3^*(t_*)$ поверхностях пластины при заданной температуре ϑ^* на нижней лицевой плоскости. Исследуется сплошная круглая пластина, выполненная из пьезокерамического состава. Электродированные лицевые поверхности элемента подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением; нижняя лицевая поверхность пластины заземлена. Расчётная схема к исследуемой задаче представлена на рис. 4.1.

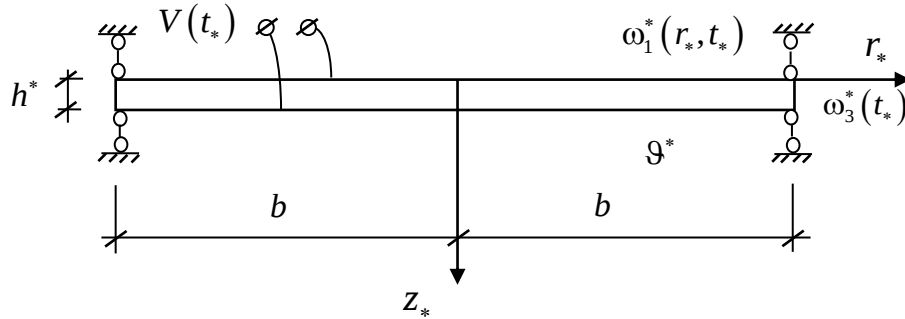


Рис. 4.1. Расчётная схема шарнирно закреплённого элемента

Дифференциальные уравнения (2.4) без учёта сил инерции в первых двух уравнениях и краевые условия (4.2) – (4.4) в безразмерной форме [49, 82] составляют математическую формулировку исследуемой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0, \\ a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= 0, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta + a_{14} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0;$$

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \quad \Theta_{|r=1} = \omega_3, \quad \{W, \phi\}_{|r=1} = 0, \quad (4.2)$$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial r} + a_{18} \frac{U}{r} + a_{16} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Theta \right]_{|r=1} = 0;$$

$$z = 0, h \quad a_{16} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (4.3)$$

$$\phi_{|z=0} = \phi_0, \quad \phi_{|z=h} = 0, \quad \Theta_{|z=0} = \omega_1, \quad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} + a_{17} \Theta \right)_{|z=h} = a_{17} \mathcal{G};$$

$$t = 0 \quad \{U, W, \phi, \Theta\} = 0, \quad (4.4)$$

$$\text{где} \quad \{U, W, r, z\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*\} / b, \quad \phi = \frac{e_{31}}{C_{11} b} \phi^*, \quad t = \frac{\Lambda}{k b^2} t_*, \quad \Theta = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \Theta^*,$$

$$\{\omega_1, \omega_3\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \left[\{\omega_1^*, \omega_3^*\} - T_0 \right], \quad a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, \quad a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}}, \quad a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}},$$

$$a_5 = \frac{e_{15}}{e_{31}}, \quad a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, \quad a_9 = \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11} \varepsilon_{11}}, \quad a_{10} = \frac{e_{15} e_{31}}{C_{11} \varepsilon_{11}},$$

$$a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}}, \quad a_{12} = \frac{g_{11} e_{31}}{\gamma_{11} \varepsilon_{11}}, \quad a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}}, \quad a_{14} = T_0 \frac{\gamma_{11} \gamma_{33}}{C_{11} k}, \quad a_{15} = T_0 \frac{g_{33} \gamma_{11}}{e_{31} k},$$

$$a_{16} = a_2 - a_1, \quad a_{17} = \alpha \frac{b}{\Lambda}, \quad a_{18} = C_{12} C_{11}^{-1}.$$

4.2. Построение общего решения задачи

Для использования преобразования Ханкеля по радиальной координате необходимо в последнем условии (4.2) принять $a_{18} = 1$ ($C_{11} = C_{12}$). Данное условие применяется только в (4.2). Кроме того, для приведения неоднородного условия (4.2) к однородному используются функции $u(r, z, t)$, $\Phi(r, z, t)$:

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + \Phi(r, z, t), \quad (4.5)$$

$$U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + u(r, z, t).$$

Подстановка (4.5) в (4.1) – (4.4) позволяет получить новую задачу относительно функций u, W, ϕ, Φ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla u + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} = F_1, \quad (4.6)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial u}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial u}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Phi + a_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi + a_{14} \left(\nabla u + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = F_2;$$

$$r = 0, 1 \quad \{u, W, \phi, \Phi\}_{|r=0} < \infty, \quad \{W, \phi\}_{|r=1} = 0, \quad \Phi_{|r=1} = 0, \quad (4.7)$$

$$\left[\nabla u + a_{16} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Phi \right]_{|r=1} = 0;$$

$$z = 0, h \quad a_{16} \nabla u + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Phi = B_1, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (4.8)$$

$$\phi_{|z=0} = \phi_0, \quad \phi_{|z=h} = 0, \quad \Phi_{|z=0} = B_2, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + a_{17} \Phi \right)_{|z=h} = B_3;$$

$$t = 0 \quad u = u_0, \quad \{W, \phi\} = 0, \quad \Phi = \Phi_0, \quad (4.9)$$

$$\text{где } F_1 = -a_{12} r^{-1} \omega_3, \quad F_2 = (1 + a_{14}) \frac{d\omega_3}{dt}, \quad B_1 = (a_7 - a_{16}) \omega_3, \quad B_2 = \omega_1 - \omega_3, \quad B_4 = a_{17} (\vartheta - \omega_3),$$

$$u_0 = -\frac{r}{2} \omega_3(0), \quad \Phi_0 = -\omega_3(0).$$

К данной задаче применяется преобразование Ханкеля [109]:

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 u(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (4.10)$$

$$\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\} = \int_0^1 \{W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Phi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$u(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (4.11)$$

$$\{W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Phi(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\}}{J_1(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

где j_n – положительные нули функции $J_0(j_n)$.

В результате проведённых преобразований получаем краевую задачу относительно трансформант:

$$-j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + j_n \Theta_H = 0, \quad (4.12)$$

$$-a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \phi_H + a_6 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = 0,$$

$$j_n^2 \phi_H - a_8 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n \Theta_H + a_{13} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = F_{1H},$$

$$-j_n^2 \Theta_H + \frac{\partial^2 \Theta_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta_H + a_{14} \left(j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \right] = F_{2H};$$

$$z = 0, h \quad a_{16} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - a_7 \Theta_H = B_{1H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad (4.13)$$

$$\phi_{|z=0} = \phi_{0H}, \quad \phi_{H|z=h} = 0, \quad \Theta_{H|z=0} = B_{2H}, \quad \left(\frac{\partial \Theta_H}{\partial z} + a_{17} \Theta_H \right)_{|z=h} = B_{3H};$$

$$t = 0 \quad u_H = u_{0H}, \quad \{w_H, \phi_H\} = 0, \quad \Theta_H = \Theta_{0H}, \quad (4.14)$$

$$\text{где } \{F_{1H}, F_{2H}, B_{1H}, B_{2H}, B_{3H}, \phi_{0H}, \Theta_{0H}\} = \int_0^1 \{F_1, F_2, B_1, B_2, B_3, \phi_0, \Phi_0\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$u_{0H} = \int_0^1 u_0 r J_1(j_n r) dr.$$

На следующем этапе решения использование новых функций $U_H(n, z, t)$, $W_H(n, z, t)$, $\phi_H(n, z, t)$, $\Theta_H(n, z, t)$ позволяет привести условия (4.13) к однородным:

$$u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \quad (4.15)$$

$$\phi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + \phi_H(n, z, t), \quad \Theta_H(n, z, t) = H_4(n, z, t) + \Theta_H(n, z, t),$$

$$\text{где } \{H_1, H_2, H_3, H_4\} = \{H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*\} + \{f_{17}(z) \dots f_{20}(z)\} \phi_{0H},$$

$$\begin{aligned} \{H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*\} = & \{f_1(z) \dots f_4(z)\} B_{1H}(0, t) + \{f_5(z) \dots f_8(z)\} B_{1H}(h, t) + \\ & + \{f_9(z) \dots f_{12}(z)\} B_{2H}(0, t) + \{f_{13}(z) \dots f_{16}(z)\} B_{3H}(h, t). \end{aligned}$$

Подставляя выражения (4.15) в уравнения (4.12) с соответствующими краевыми условиями (4.13), (4.14) при удовлетворении следующих условий (4.16):

$$z = 0, h \quad a_{17} j_n H_1 + a_4 \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_6 \frac{\partial H_3}{\partial z} - a_7 H_4 = B_{1H}, \quad j_n H_2 - \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0, \quad (4.16)$$

$$H_{3|z=0} = \phi_{0H}, \quad H_{3|z=h} = 0, \quad H_{4|z=0} = B_{2H}, \quad \left(\frac{\partial H_4}{\partial z} + a_{17} H_4 \right)_{|z=h} = B_{3H},$$

получаем краевую задачу относительно функций $U_H(n, z, t)$, $W_H(n, z, t)$, $\varphi_H(n, z, t)$,

$\Phi_H(n, z, t)$:

$$-j_n^2 U_H + a_1 \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + j_n \Phi_H = F_{1H}^*, \quad (4.17)$$

$$-a_1 j_n^2 W_H + a_4 \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \varphi_H + a_6 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = F_{2H}^*,$$

$$j_n^2 \varphi_H - a_8 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 W_H + a_{11} \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n \Phi_H + a_{13} \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = F_{3H}^*,$$

$$-j_n^2 \Phi_H + \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] = F_{4H}^*;$$

$$z = 0, h \quad a_{16} j_n U_H + a_4 \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - a_7 \Phi_H = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0, \quad (4.18)$$

$$\varphi_{H|z=0} = \varphi_{H|z=h} = \Phi_{H|z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_H}{\partial z} + a_{17} \Phi_H \right)_{|z=h} = 0;$$

$$t = 0 \quad U_H = U_{0H}, \quad W_H = W_{0H}, \quad \varphi_H = \varphi_{0H}; \quad \Phi_H = \Phi_{0H}; \quad (4.19)$$

где $F_{1H}^* = j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4,$

$$F_{2H}^* = a_1 j_n^2 H_2 - a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_5 j_n^2 H_3 - a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_7 \frac{\partial H_4}{\partial z},$$

$$F_{3H}^* = F_{1H} - j_n^2 H_3 + a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_{10} j_n^2 H_2 - a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_{12} j_n H_4 - a_{13} \frac{\partial H_4}{\partial z},$$

$$F_{4H}^* = F_{2H} + j_n^2 H_4 - \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[H_4 + a_{14} \left(j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial H_3}{\partial z} \right],$$

$$U_{0H} = u_{0H} - H_{1|t=0}, \quad W_{0H} = -H_{2|t=0}, \quad \varphi_{0H} = -H_{3|t=0}, \quad \Phi_{0H} = \Theta_{0H} - H_{4|t=0}.$$

С целью решения краевой задачи, представленной выражениями и краевыми условиями (4.17) – (4.19), будем использовать структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП), содержащий неизвестные компоненты собственных вектор - функций ядер преобразований $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_4(\lambda_{in}, z), N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$ [106]:

$$G(n, \lambda_{in}, t) = \int_0^h \left[\Phi_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz, \quad (4.20)$$

$$\{U_H, W_H, \varphi_H, Y_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z), N_4(\mu_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2},$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_4(\lambda_{in}, z) N_4(\mu_{in}, z) dz.$$

Сформулированная задача (4.14) – (4.18) аналогична задаче (3.13) – (3.15), процедура преобразования которой и общее решение подробно представлены в главе 3 настоящей диссертации.

Выражения функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)$ имеют следующий вид:

$$U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (4.21)$$

$$W(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Неизвестные функции $f_1(z) \dots f_{20}(z)$ вычисляются при упрощении уравнений (4.17):

$$\begin{aligned} j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4 &= 0, \\ a_1 j_n^2 H_2 - a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_5 j_n^2 H_3 - a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_7 \frac{\partial H_4}{\partial z} &= 0, \\ F_{1H} - j_n^2 H_3 + a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_{10} j_n^2 H_2 - a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_{12} j_n H_4 - a_{13} \frac{\partial H_4}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} - j_n^2 H_4 &= 0, \end{aligned}$$

при удовлетворении граничных условий (4.16).

Для шарнирно закреплённой пластины на верхней лицевой поверхности пластины формируется сплошной электрод. В этом случае потенциал $\phi_0(r, t) = \phi_0(t)$ при использовании дополнительного условия (2.8) и учёте, что температура внешней среды ϑ^* равна температуре тела в начальный момент времени T_0 ($\vartheta = 0$), определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta(r, z, t) &= \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\ \phi_0(t) &= Q_0^{-1} [Q_1(t) + Q_2(t)], \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \text{где } Q_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [j_n J_1(j_n)]^{-1} \left\{ \frac{a_{10}}{a_5} j_n H_1^*(n, 0, t) + a_{11} \frac{\partial H_2^*(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{\partial H_3^*(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(n, \lambda_{in}, t)}{\|K_{in}\|^2} \left[\frac{a_{10}}{a_5} j_n N_1(\lambda_{in}, 0) + a_{11} \frac{dN_2(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=0} - a_8 \frac{dN_3(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=0} \right] \right\}, \\ Q_2(t) &= \frac{a_{13}}{2} \int_0^1 \omega_1(r, t) r dr + \left(\frac{a_{10}}{a_5} + a_{13} \right) \frac{\omega_3(t)}{4}, \quad Q_0 = \sum_{n=1}^{\infty} j_n^{-2} \left[a_8 \frac{df_{11}(z)}{dz} \Big|_{z=0} - \frac{a_{10}}{a_5} j_n f_9(z) - a_{11} \frac{df_{10}(z)}{dz} \Big|_{z=0} \right]. \end{aligned}$$

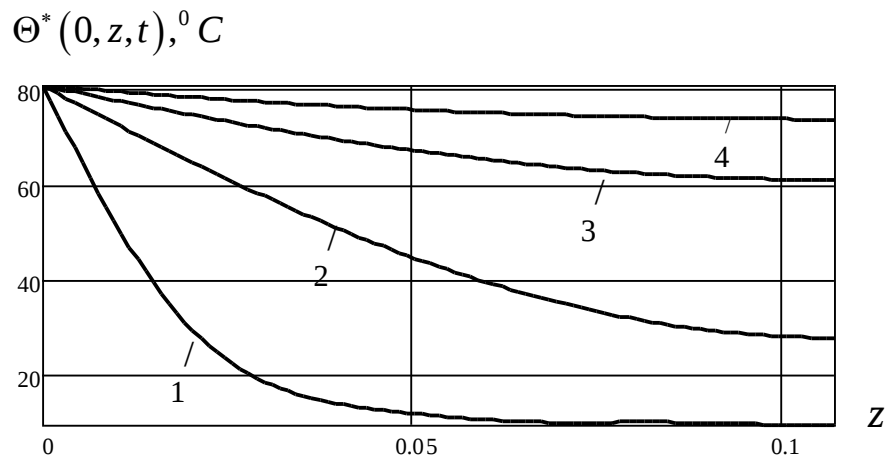
Разность потенциалов $V(t)$ с учётом заземления нижней лицевой поверхности пластины определяется равенством:

$$V(t) = \phi_0(t). \quad (4.23)$$

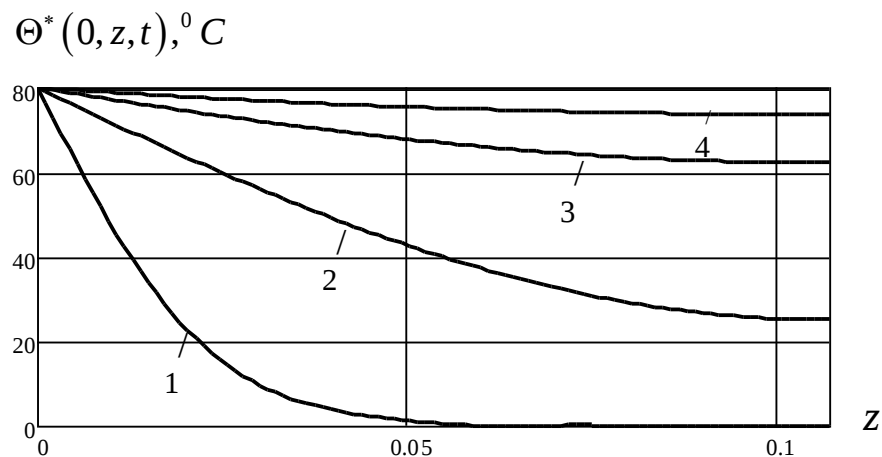
4.3. Численный анализ результатов исследуемой задачи

Рассматривается сплошная круглая пластина ($b=14 \times 10^{-3}$ м, $h^*=1.5 \times 10^{-3}$ м), изготовленная из пьезокерамических составов PZT-4 и PZT-5A. Изменение температурной нагрузки на верхней плоскости задается зависимостью (2.57). При этом температуры на цилиндрической поверхности $\omega_3^*(t_*)$ и внешней среды ϑ^* равны первоначальной температуре T_0 .

На рис. 4.2 представлены графики $\Theta^*(0, z, t) - z$ для различных моментов времени ($t_{max}^* = 0.1$ с), 1: $t = t_{max}$, 2: $t = 10 t_{max}$, 3: $t = 30 t_{max}$, 4: $t = 100 t_{max}$.



а) состав PZT-4



б) состав PZT-5A

Рис. 4.2. Изменение $\Theta^*(0, z, t)$ по высоте пластины,
1: $t = t_{max}$, 2: $t = 10 t_{max}$, 3: $t = 30 t_{max}$, 4: $t = 100 t_{max}$

При определении температурного поля в шарнирно закреплённой пьезокерамической пластине можно так же, как и при жёстком её закреплении, пренебречь влиянием скорости изменения объёма тела и напряжённости на температурное поле, т. е. использовать в расчётах только уравнение теплопроводности. Поэтому результаты расчёта по определению зависимостей « $\Theta^*(0, z, t)$ » для данных вариантов закрепления пластины (см. рис.3.2, 4.2) одинаковы.

На рис. 4.3, 4.4 показаны эпюры $\{W(0, z, t), U(0.5, z, t)\} - z$ в пластине составов PZT-4, PZT-5A (для моментов времени 1: $t = t_{max}$, 2: $t = 10 t_{max}$, 3: $t = 100 t_{max}$).

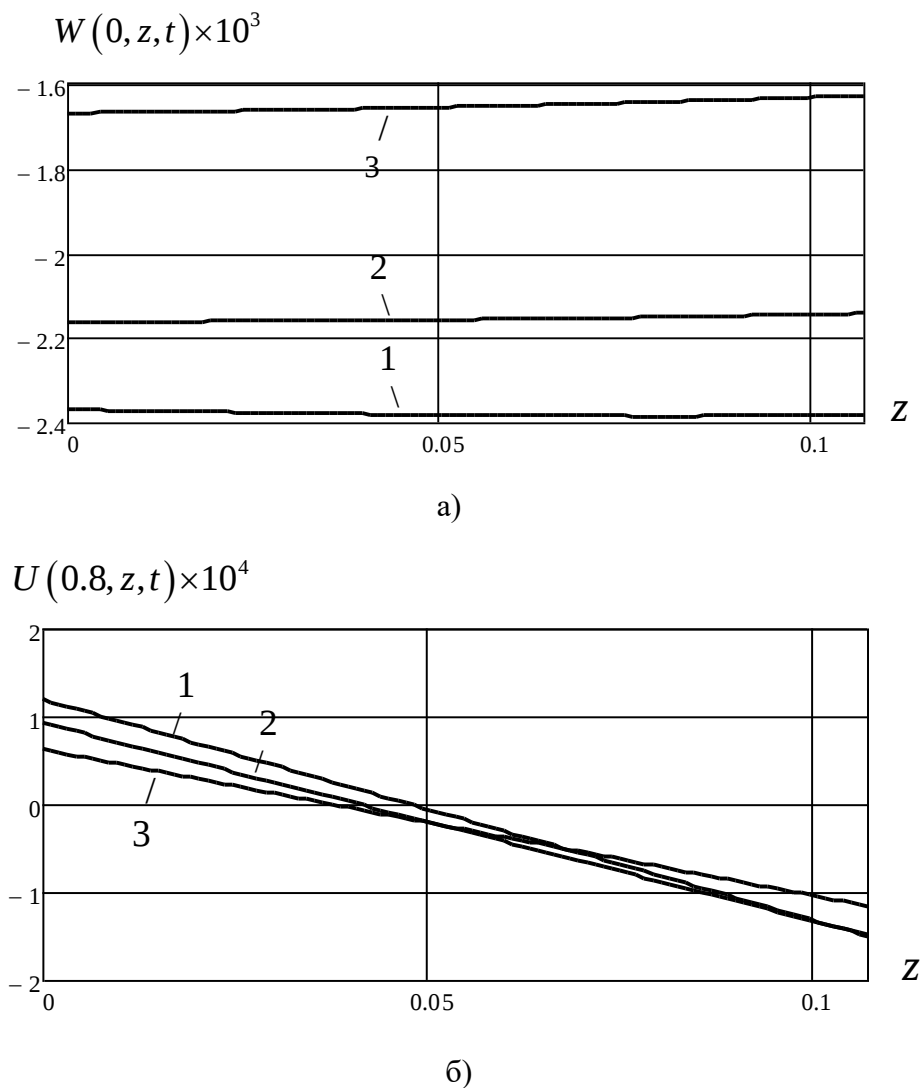


Рис. 4.3. Изменение перемещений по высоте пластины из состава PZT-4,

1: $t = t_{max}$, 2: $t = 10 t_{max}$, 3: $t = 100 t_{max}$

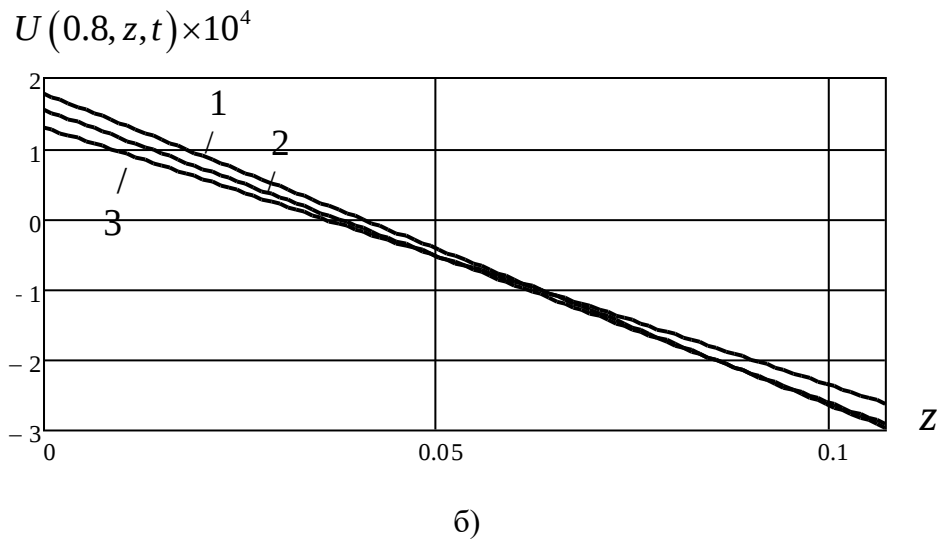
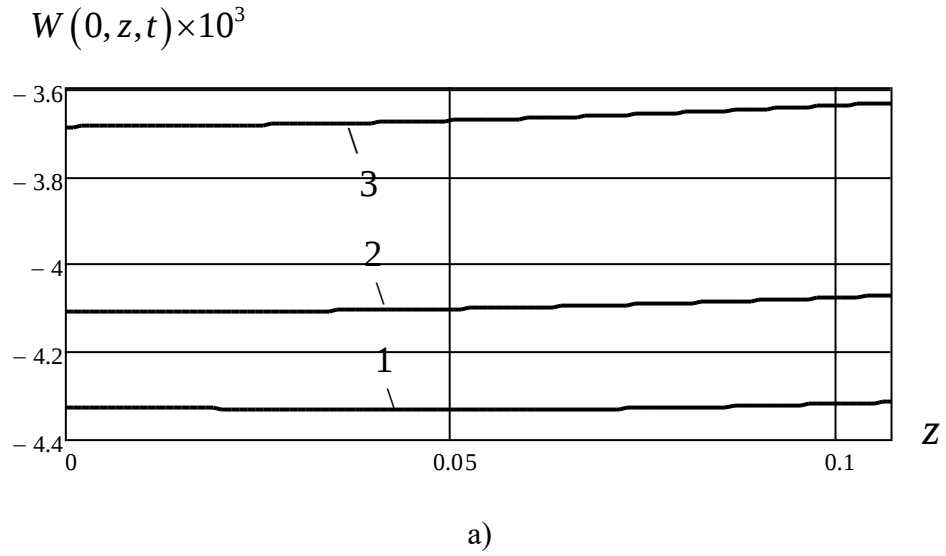


Рис. 4.4. Изменение перемещений по высоте пластины из состава PZT-5A,

1: $t = t_{max}$, 2: $t = 10 t_{max}$, 3: $t = 100 t_{max}$

На рис. 4.5 приведены графики напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t) - r$ при $t = 100 t_{max}$. Сплошной линией представлены напряжения на верхней плоскости пластины при $z=0$, пунктирной – на нижней при $z=h$.

На основании проделанного анализа результатов расчётов для круглой сплошной пластины, выполненной из пьезокерамического состава, при шарнирном закреплении (рассмотрено в данной главе) и жёстком закреплении (рассмотрено в главе 3) её цилиндрической поверхности, делаем следующие выводы:

- при шарнирном закреплении рассматриваемого пьезокерамического элемента величина компонент перемещений существенно больше, чем при жёстком закреплении;
- наибольшие значения радиальных перемещений при шарнирном закреплении пьезокерамической пластины наблюдаются при радиусе $r=0.8$, а при жёстком закреплении – при $r=0.5$;
- действующая температурная нагрузка приводит к деформации конструкции. В результате температурного воздействия материал прогревается, пластина изгибается за счёт теплового расширения и условий закрепления. На её верхней поверхности наблюдаются растягивающие напряжения $\sigma_{rr}(r, z, t)$, а на нижней плоскости – сжимающие;
- нормальные напряжения $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по всей плоскости по радиальной координате имеют практически постоянные значения, за исключением области вблизи цилиндрической поверхности за счёт удовлетворения граничных условий при $r=1$.

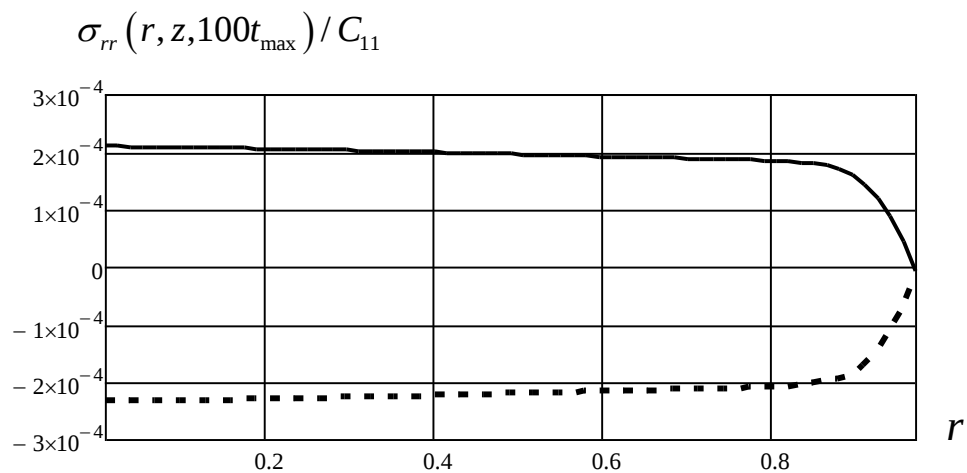


Рис. 4.5. Изменение $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по радиальной координате пластины из пьезокерамического состава PZT-4 при $t = 100 t_{max}$

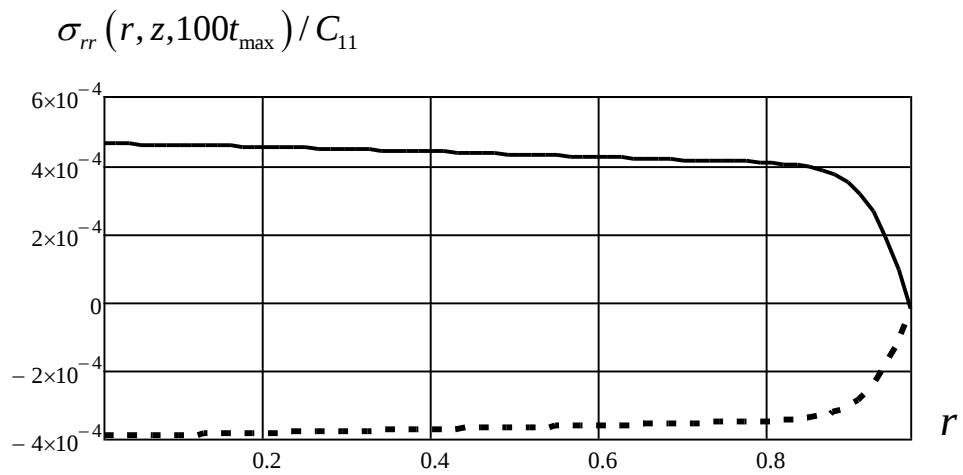
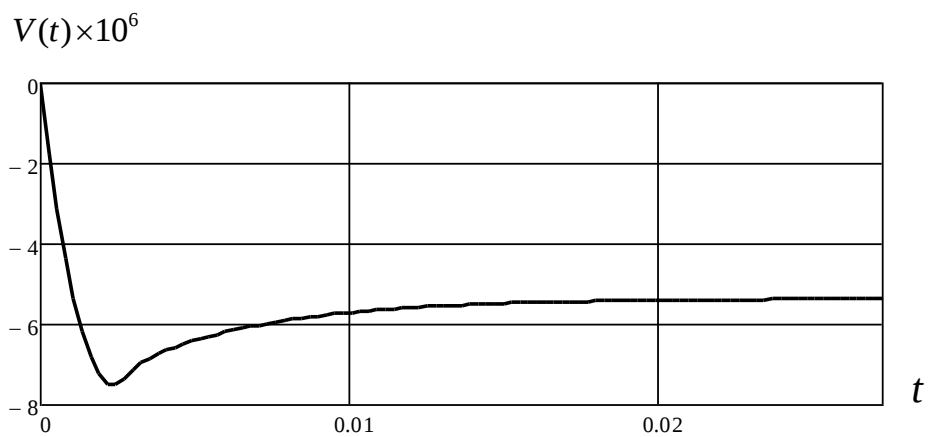
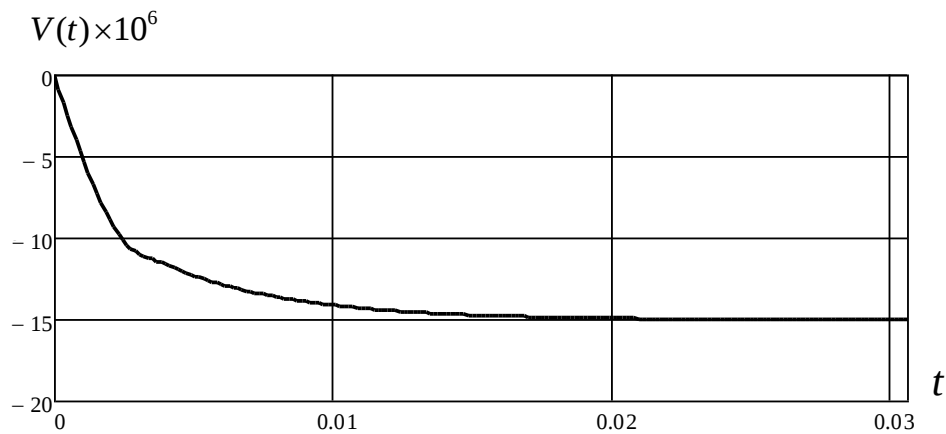


Рис. 4.6. Изменение по радиальной координате пластины из пьезокерамического состава PZT-5A при $t = 100 t_{max}$

На рис. 4.7 представлены графики изменения $V(t)$ по времени ($t_{max}^* = 1$ с).



а) пластина из пьезокерамики состава PZT – 4



б) пластина из пьезокерамики состава PZT – 5A

Рис. 4.7. Изменение разности потенциалов $V(t)$ по времени

По итогам численного решения задачи можно сделать следующие **выводы**:

- использование мягкой пьезокерамики PZT–5A приводит к образованию более высоких численных значений перемещений, что позволяет получить большие значения разности потенциалов $V(t)$;
- характер изменения $V(t)$ во времени для рассматриваемых пьезокерамических составов различный. При использовании пьезокерамических составов более жёстких, в данном случае это состав PZT–4, из-за стремительного приложения температурной нагрузки, т. н. «теплового удара» (при $t \geq t_{max}$), наблюдается резкое изменение величин напряжений, и, далее, происходит их снижение в течение времени в связи с равномерным прогреванием элемента. В мягкой пьезокерамике PZT–5A данный скачок $V(t)$ отсутствует;
- более высокие перемещения в пластине из пьезокерамики PZT–5A приводят к большим амплитудным значениям $V(t)$.

Анализ результатов, полученных для пластин с различным закреплением, показывает, что электроупругая система, имеющая большую степень свободы, а именно пластина с шарнирным закреплением, при одинаковом внешнем воздействии индуцирует на внешней поверхности более высокий электрический импульс.

4.4. Анализ результатов расчётов, полученных аналитическим и численным методами

Представленные в настоящей диссертационной работе теоретические результаты замкнутого решения сравниваются с результатами, полученными численным методом с помощью программного комплекса ANSYS. Для проведения расчётного анализа применён инструмент Structural Mechanics. Расчёт выполнен с применением расчётных модулей Transient Thermal, который позволяет определить температурное поле как нагрузку и Static Structural, в котором выполнен расчёт

напряжённно-деформированного состояния исследуемой круглой сплошной пластины.

Для выполнения расчёта численным методом построена геометрическая модель круглой сплошной пластины, в которой сформирована упорядоченная (регулярная) сетка, состоящая из четырёхугольных конечных элементов общим количеством 8400 единиц (рис. 4.8). С целью определения температурного поля в рассматриваемом элементе использовался двумерный твердотельный плоский конечный элемент PLANE 77; для определения напряжённно-деформированного состояния пластины — конечный элемент PLANE 223 из библиотеки конечных элементов программного комплекса.

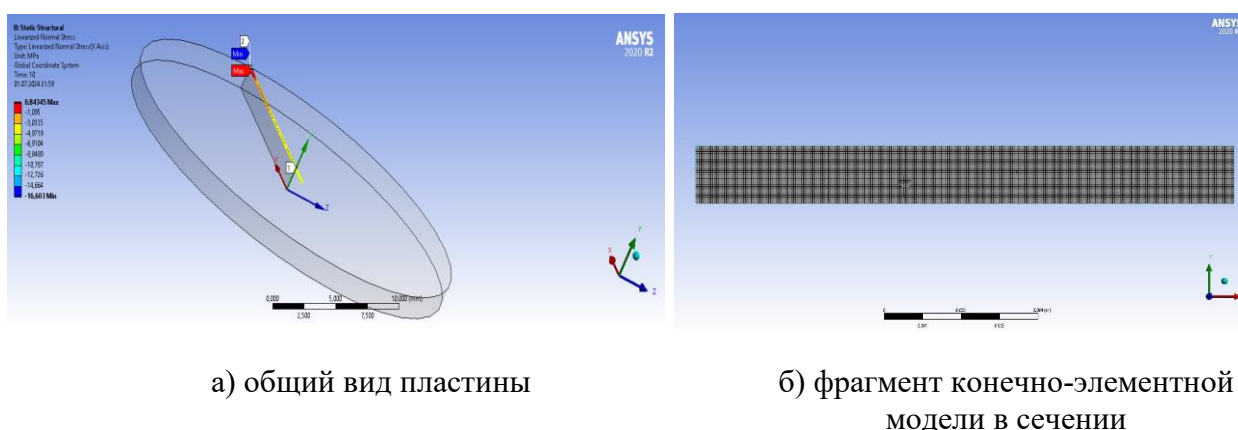


Рис. 4.8. Модель исследуемой пластины в среде ANSYS

На первом этапе выполняется нестационарный расчёт сплошной однослойной круглой пластины, изготовленной из пьезокерамического состава PZT-4 ($b=14 \times 10^{-3}$ м, $h^*=1.5 \times 10^{-3}$ м) с учётом изменения температурной нагрузки на её верхней лицевой поверхности. График изменения температуры представлен на рис. 4.9.

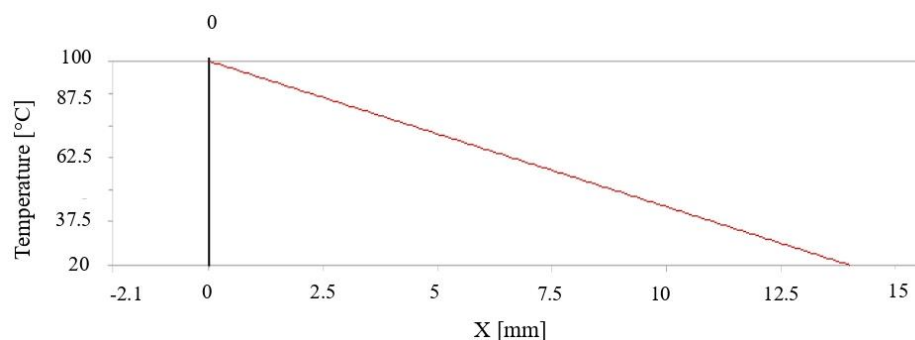


Рис. 4.9. Изменение $\omega_1^*(r_*, t_{max})$ по радиальной координате пластины

Результатом расчёта является тепловое поле, величины которого можно зафиксировать в различные моменты времени (рис. 4.10, 4.11).

На обобщённом рис. 4.10 обозначены изопараметрические контуры изменения температуры по радиальной координате при $t = t_{max}$, $t = 10 t_{max}$, $t = 30 t_{max}$, $t = 100 t_{max}$.

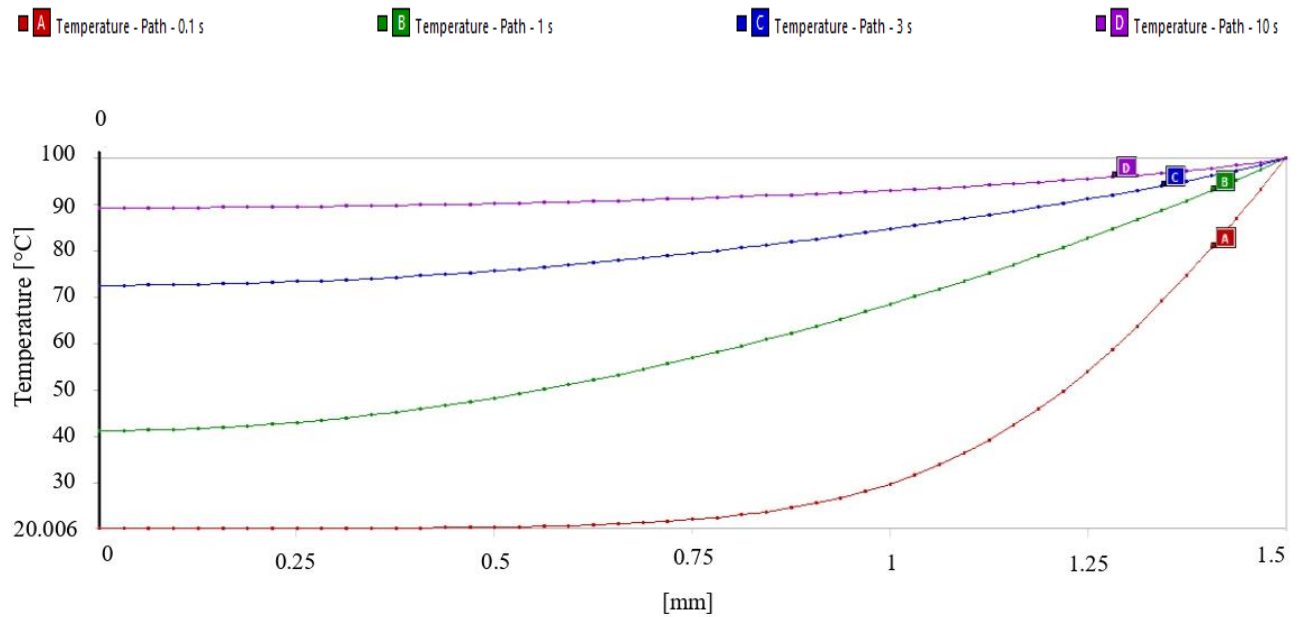


Рис. 4.10. Обобщённый график изменения температурного поля $\theta^*(0, z, t)$ по высоте пластины в различные моменты времени (0, 1 с, 1 с, 3 с, 10 с)

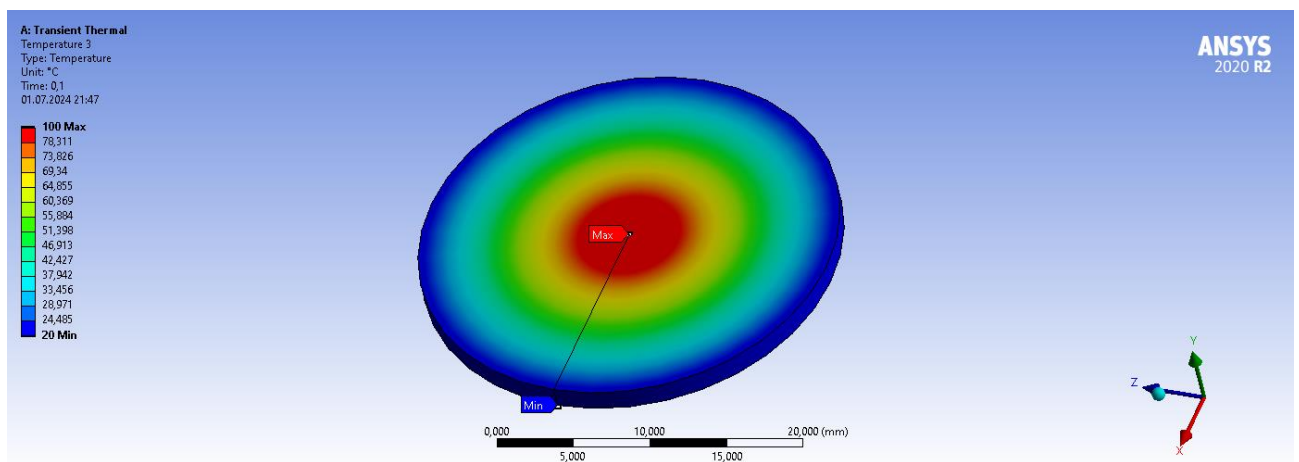


Рис. 4.11. Температурное поле за время $t = t_{max}$. Общий вид пластины

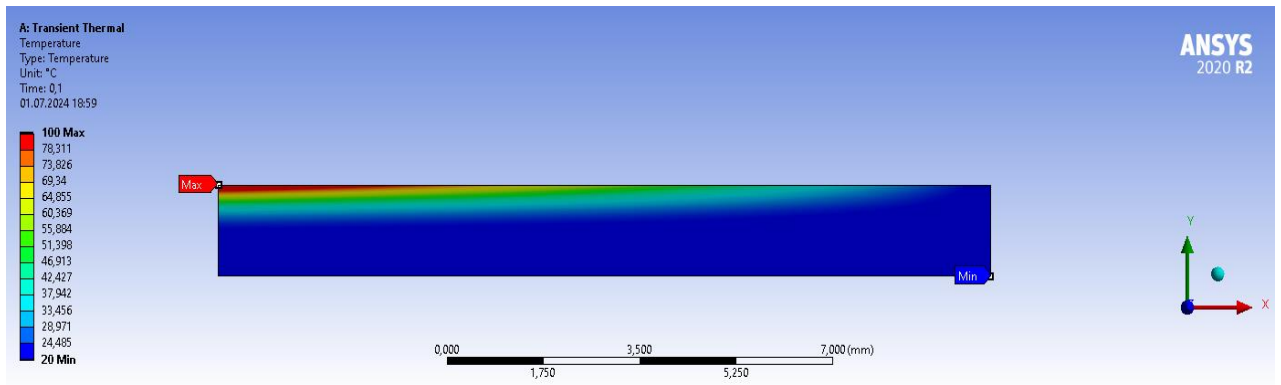
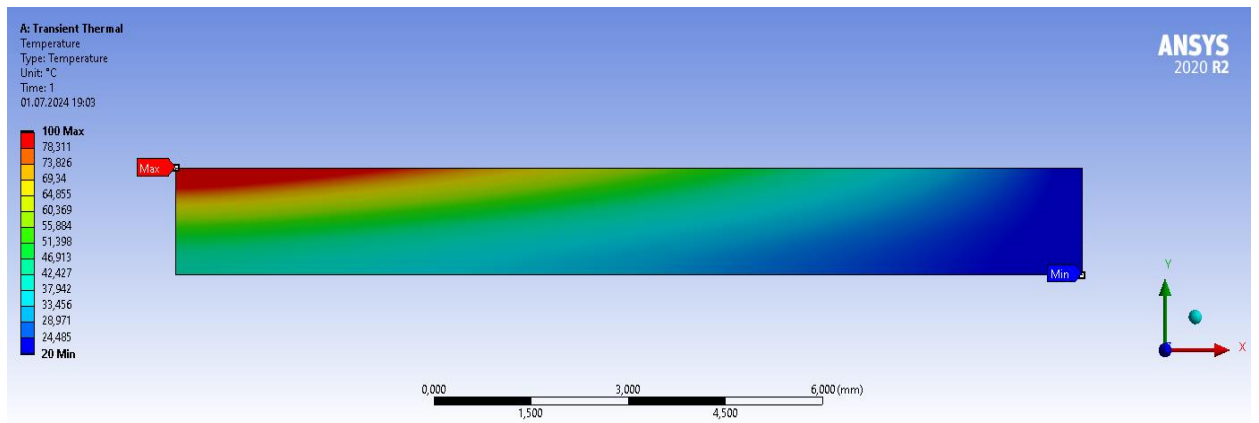
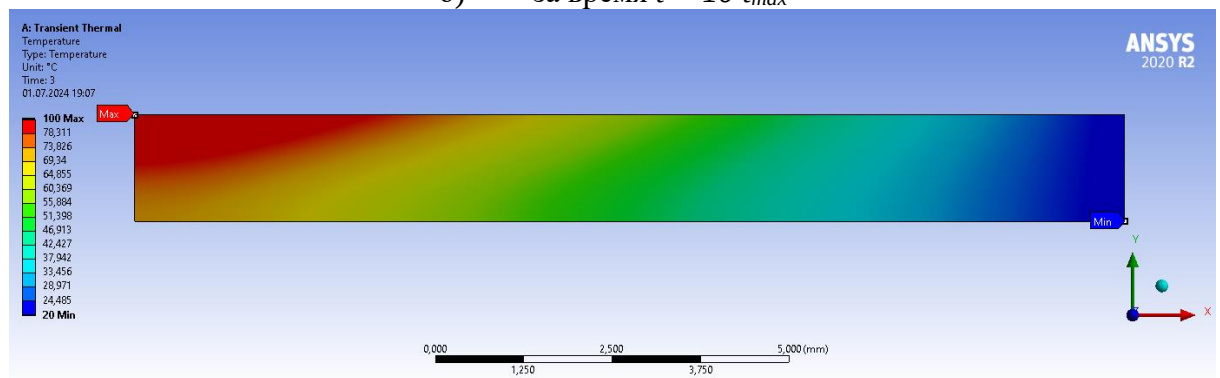
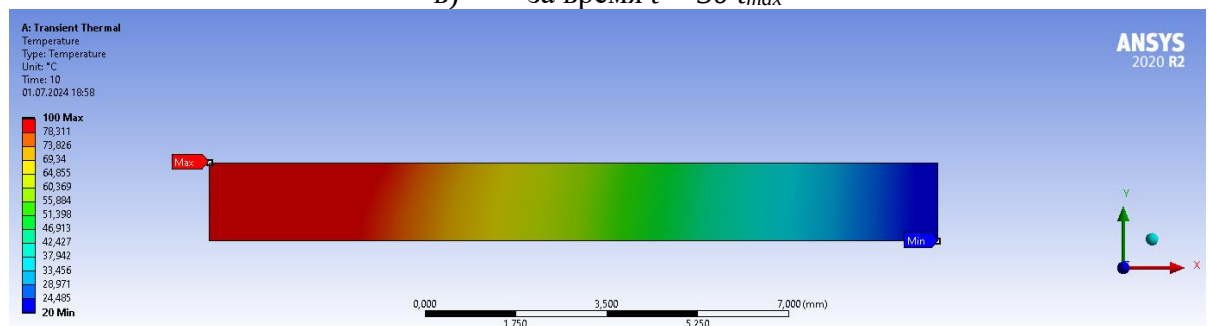
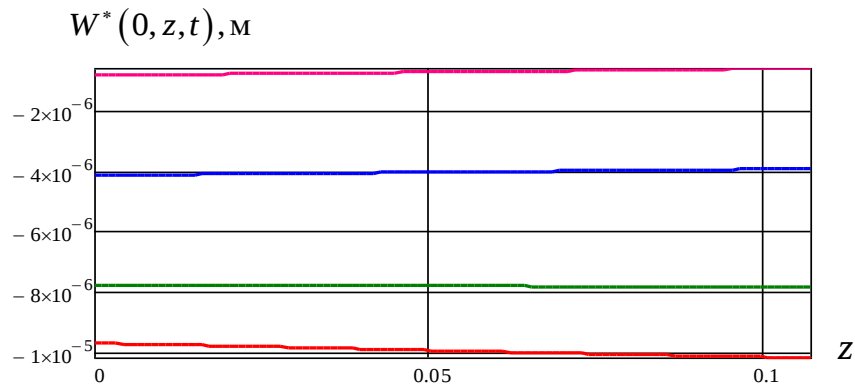
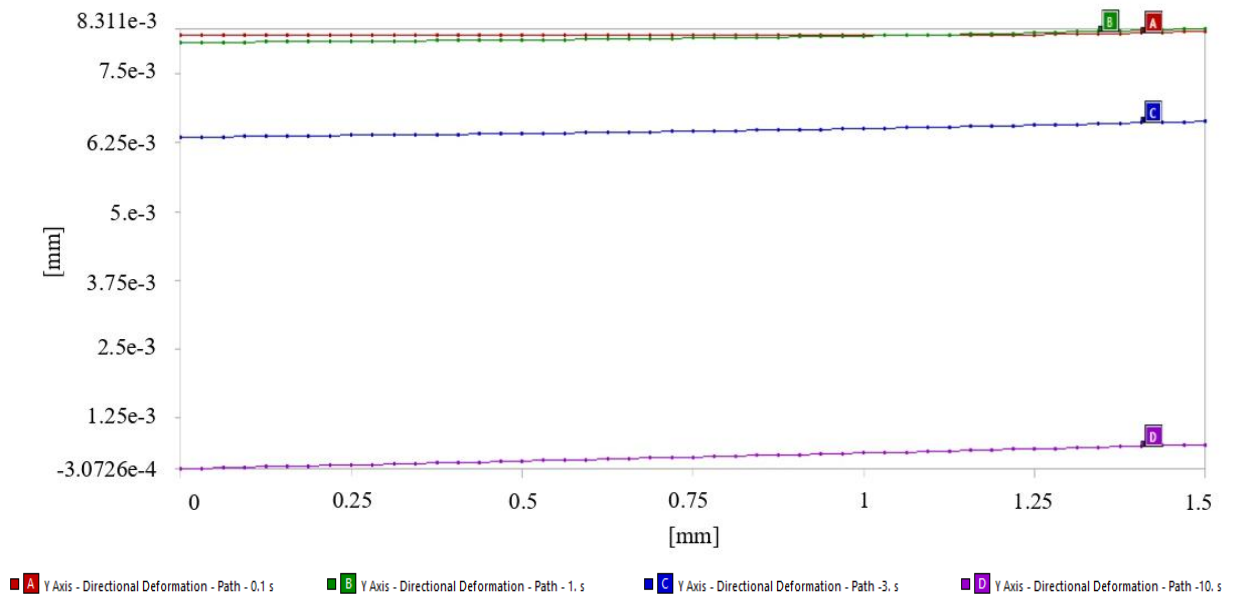
а) за время $t = t_{max}$ б) за время $t = 10 t_{max}$ в) за время $t = 30 t_{max}$ г) за время $t = 100 t_{max}$

Рис. 4.12. Изменение температурного поля в пластине в различные моменты времени

На рис. 4.13 показаны графики $W^*(0, z, t) - z$ по высоте пластины в различные моменты времени, полученные аналитическим и численным методом.



а) графики, полученные в ходе аналитического расчёта

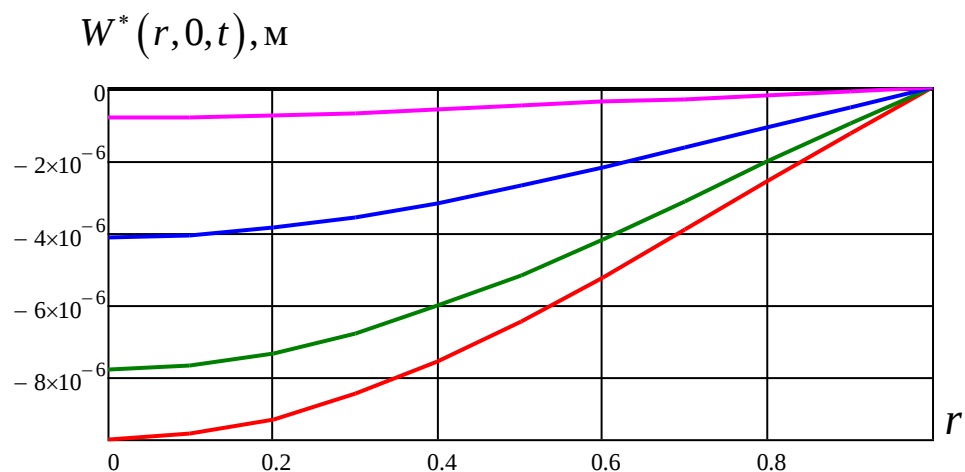


б) графики, полученные в ходе численного расчёта

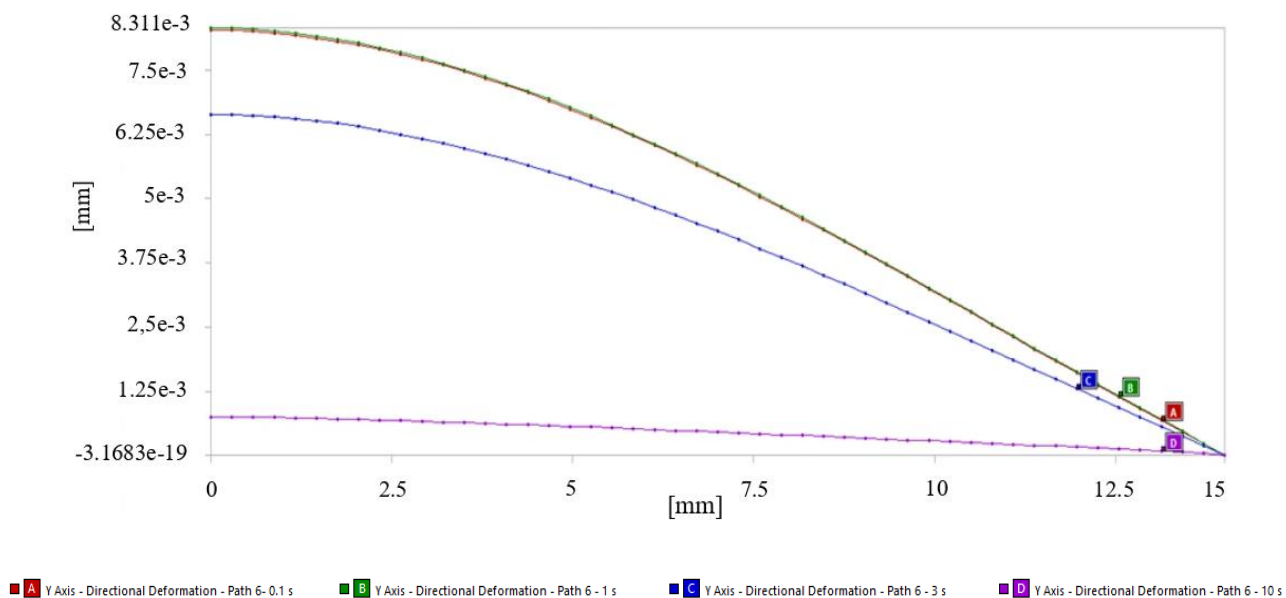
Рис.4.13. Изменение перемещений $W^*(0, z, t)$ по высоте пластины в различные моменты времени ($t = t_{max}$, $t = 10 t_{max}$, $t = 30 t_{max}$, $t = 100 t_{max}$)

Эпюры $\{W^*(r, 0, t), \sigma_{rr}(r, 0, t)\} - r$ в различные моменты времени, полученные аналитическим и численным методом, представлены на рис. 4.14, 4.15. Красным, зеленым, синим и сиреневыми цветами обозначены графики для времени соответственно при $t = t_{max}$, $t = 10 t_{max}$, $t = 30 t_{max}$, $t = 100 t_{max}$.

Температурное поле в пластине (см. рис. 4.10, рис. 4.11) является нагрузкой при исследовании её напряженно-деформированного состояния при наличии короткозамкнутых лицевых поверхностей ($\phi(r_*, 0, t_*) = \phi(r_*, h, t_*) = 0$).

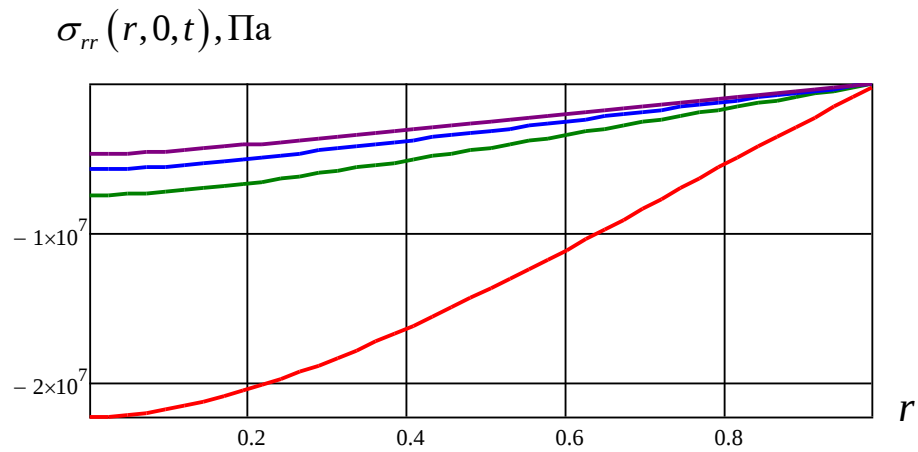


а) графики, полученные в ходе расчёта аналитической модели

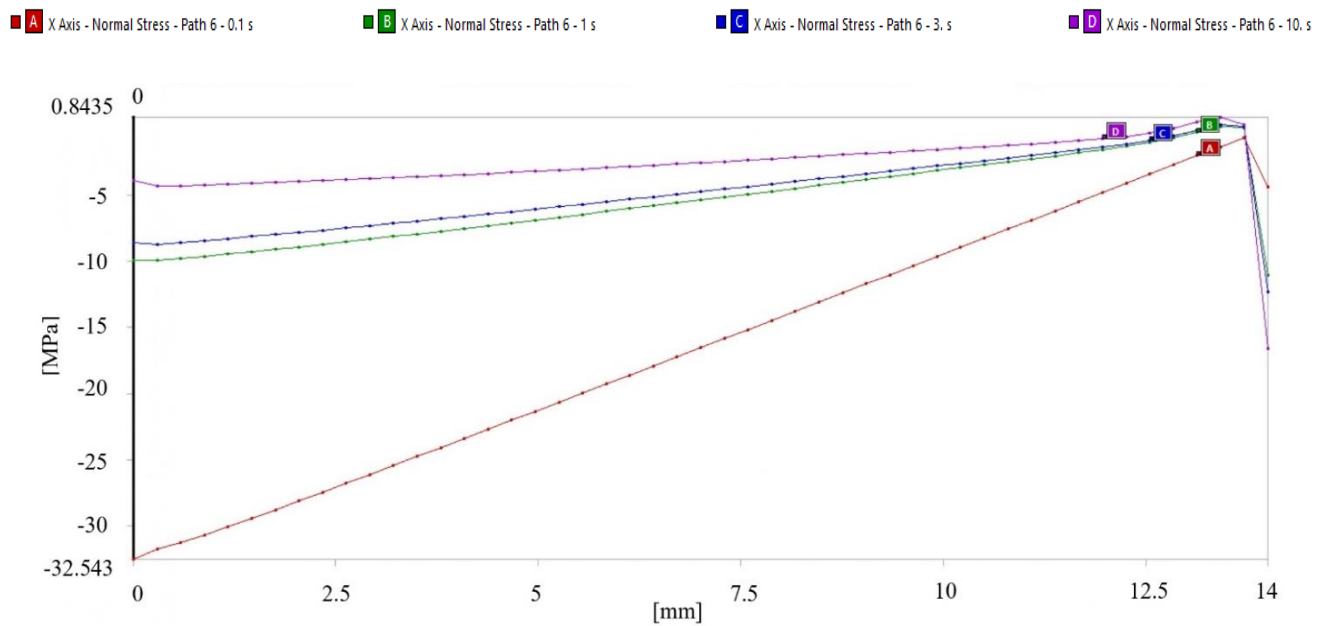


б) графики, полученные в ходе численного расчёта МКЭ

Рис.4.14. Изменение перемещений $W^*(r, 0, t)$ по радиальной координате в различные моменты времени ($t = t_{max}$, $t = 10 t_{max}$, $t = 30 t_{max}$, $t = 100 t_{max}$)



а) графики, полученные в ходе расчёта аналитической модели



б) графики, полученные в ходе численного расчёта МКЭ

Рис.4.15. Изменение напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ по r в различные моменты времени ($t = t_{max}$, $t = 10 t_{max}$, $t = 30 t_{max}$, $t = 100 t_{max}$)

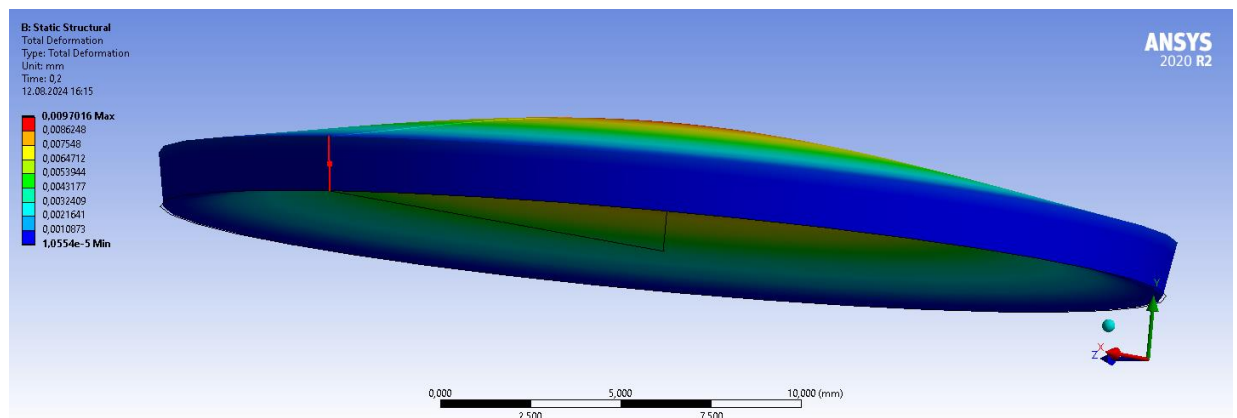


Рис. 4.16. Изменение напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, 0.2)$ по r . Общий вид пластины

Нужно отметить, что разница в численных значениях вертикальной компоненты перемещений $W^*(r, z, t)$ (см. рис. 4.13, 4.14), полученных аналитическим и численным методами в различные моменты времени составляет: $t = t_{max} - 30 \%$, $t = 10 t_{max} - 8 \%$, $t = 30 t_{max} - 50 \%$, $t = 100 t_{max} - 5 \%$. При проведении аналогичного сравнения полученных результатов напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ (см. рис. 4.15, а также общий вид на рис. 4.16) наблюдаем, что при $t = t_{max} - 50 \%$, $t = 10 t_{max} - 30 \%$, $t = 30 t_{max} - 25 \%$, $t = 100 t_{max} - 4 \%$ (см. 4.15 и рис. 4.17).

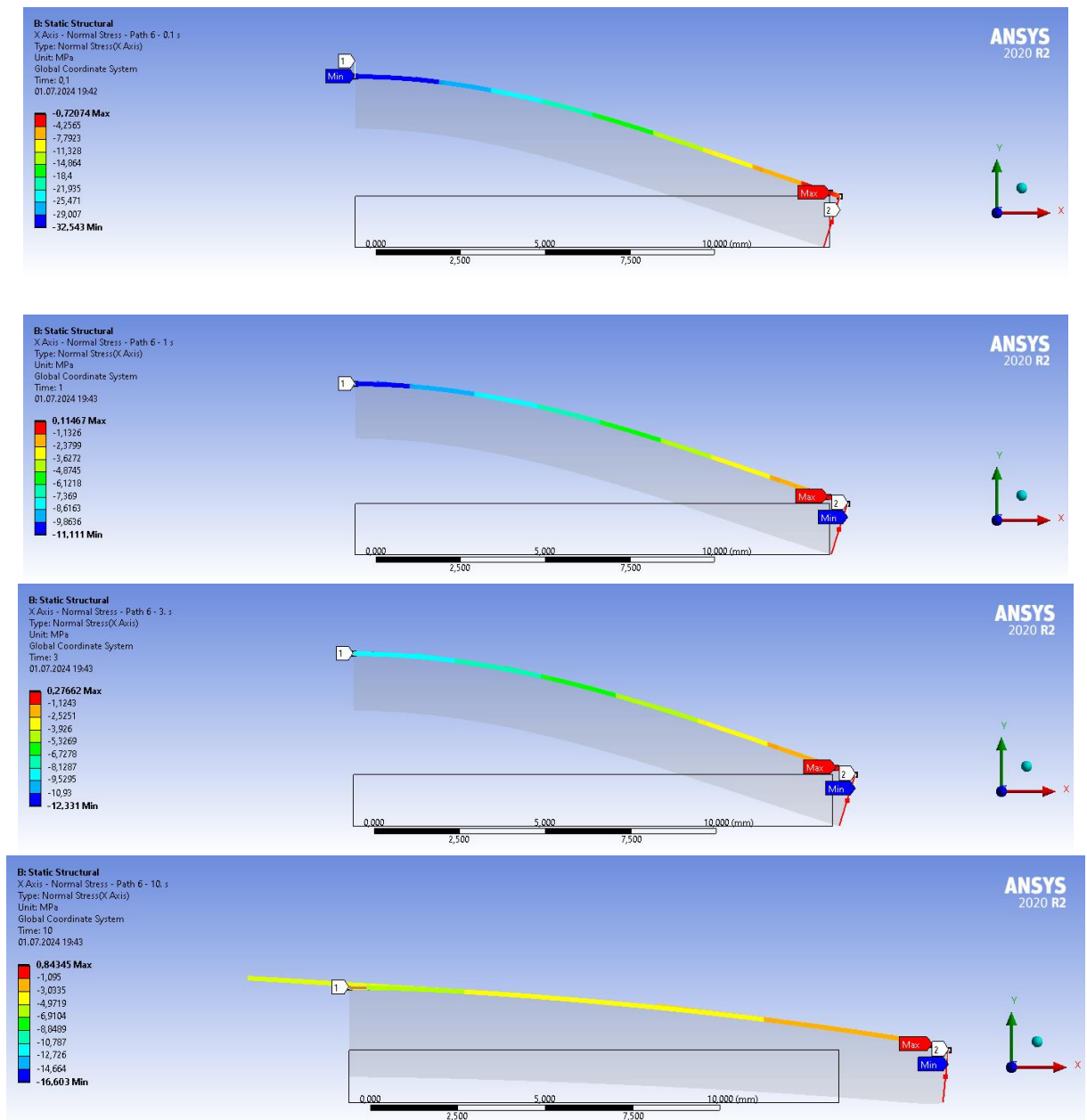


Рис.4.17. Изменение напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ по r по результатам расчёта в ANSYS в различные моменты времени 0.1, 1, 3, 10 с

Вывод: результаты расчёта и их анализ показывают, что численный метод конечных элементов при установившемся температурном режиме позволяет получить результаты, достаточно точно совпадающие с аналитическим решением. Однако при исследовании нестационарных процессов использование метода конечных элементов приводит к существенной ошибке. Это объясняется тем, при использовании численного метода МКЭ рассматривается несвязанная задача. На первом этапе определяется температурное поле, а на следующем, при определении напряжённо-деформированного состояния пластины, исследуется квазистатическая задача. В результате, в отличие от алгоритма решения связанной задачи, построенного в данной работе, расчёт МКЭ не учитывает скорость распространения температурного поля в электроупругой системе.

ГЛАВА 5. СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОЙ КРУГЛОЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Создание пьезоэлектрических датчиков, способных работать с высокой точностью в широком диапазоне температур, особенно в экстремальных условиях и при резких температурных колебаниях, является важной задачей в разработке измерительной техники. Значительные и быстрые температурные изменения вызывают переходные процессы внутри датчика, приводя к искажению результатов измерения и увеличению погрешности. Поэтому необходимо совершенствовать конструкцию и технологию изготовления пьезоэлектрических датчиков для повышения их точности и расширения рабочего температурного диапазона в условиях эксплуатации с экстремальными температурными воздействиями.

Отсутствие аналитических решений в общем виде, описывающих процессы, происходящие в чувствительном пьезокерамическом элементе преобразователя при действии температурной нагрузки с одной стороны и применение таких элементов в промышленности в приборах для целей измерения температуры с другой, привело к необходимости расчёта данных элементов с помощью приближённых численных методик. В качестве программы, способной реализовать расчёты элементов, на которые действует температурная нагрузка, используется, как правило, программный комплекс ANSYS.

Сравнительный анализ результатов расчёта, приведенный в 4 главе кандидатской диссертации, показывает, что численный метод конечных элементов при установившемся температурном режиме позволяет получить результаты, достаточно точно совпадающие с аналитическим решением. Однако при исследовании нестационарных процессов использование метода конечных элементов приводит к существенной ошибке.

Для решения данной проблемы в настоящей главе построено новое замкнутое решение осесимметричной нестационарной задачи для круглой сплошной

многослойной пластины. Рассматриваемая задача находит свое практическое применение при проектировании на предприятии ООО «СМР-Проект» температурных многослойных пьезокерамических преобразователей (проектная марка опытного образца ДТ-ПЗ-11.2), которые состоят из электроупругого и теплоизолирующего слоёв, а также металлической подложки, позволяющей повысить прочностные характеристики конструкции. Техническое задание данной организации связано с анализом влияния физико-механических характеристик изотропных слоев на величину электрического импульса, что позволит повысить функциональные параметры и чувствительность проектируемого теплового пьезокерамического преобразователя. При построении решения задачи были учтены результаты, полученные по итогам исследования задач, представленных в главах 2 ... 4, в которых приведены задачи с жёстким и шарнирным креплением чувствительных круглых однослойных элементов из пьезокерамического материала. Геометрические размеры пьезокерамической пластины, используемые в численных результатах расчёта, были приняты на основании проектного задания. Использовалось шарнирное закрепление многослойной пластины, как обеспечивающее больший электрический импульс при деформации.

5.1. Постановка исследуемой задачи

Круглая сплошная многослойная шарнирно закреплённая пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область Ω : $\{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$.

Для определенности построенного ниже решения исследуется трёхслойный элемент, в котором центральный слой выполнен из пьезокерамического материала ($h^* = \sum_{j=1}^3 h_j^*$, j – номер слоя). Рассматривается случай изменения температуры на верхней лицевой $\omega_1^*(r_*, t_*)$ и на цилиндрической $\omega_3^*(t_*)$ поверхностях пластины при заданной температуре ϑ^* на её нижней плоскости. Электродированные поверхности пьезокерамического слоя подключены к измерительному прибору с

большим входным сопротивлением (рис. 5.1), при этом его нижняя плоскость ($z_* = h_1^* + h_2^*$) заземлена. Расчётная схема к исследуемой задаче представлена на рис. 5.1.

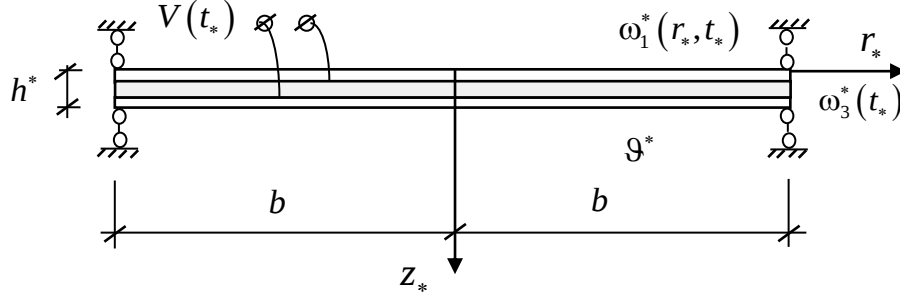


Рис. 5.1. Расчётная схема многослойного шарнирно закреплённого элемента

Для пьезокерамического анизотропного слоя ($j=2$) система дифференциальных уравнений в безразмерной форме представлена в виде расчётных соотношений (4.1), а аналогичная система уравнений для слоёв (верхнего и нижнего $j=1, 3$), выполненных из изотропных материалов, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + b_1^{(j)} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + b_2^{(j)} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - b_3^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial r} &= 0, \\ b_1^{(j)} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + b_2^{(j)} \frac{\partial}{\partial z} \nabla U - b_3^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= 0, \\ \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[b_4^{(j)} \Theta + b_5^{(j)} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Граничные условия по радиальной координате записываются следующим образом:

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \quad W_{|r=1} = 0, \quad \Theta_{|r=1} = \omega_3, \quad (5.2)$$

– пьезокерамический материал, с учётом условия $C_{11} = C_{12}$:

$$\phi_{|r=1} = 0, \quad \left(\nabla U + a_{16} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{|r=1} = \omega_3;$$

– изотропный материал, с учётом условия $b_3^{(j)} / b_6^{(j)} = 1$:

$$\left(\nabla U + \frac{1}{b_6^{(j)}} \frac{\partial W}{\partial z} \right)_{|r=1} = \omega_3.$$

Граничные условия по аксиальной координате имеют вид:

$$z = 0 \quad \nabla U + b_6^{(1)} \frac{\partial W}{\partial z} = b_3^{(1)} b_6^{(1)} \omega_1, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \Theta = \omega_1, \quad (5.3)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \{U, W, \Theta\}_{|-z} = \{U, W, \Theta\}_{|+z}, \quad \phi_{|z=h_1} = \phi_0, \quad \phi_{|z=h_1+h_2} = 0, \quad (5.4)$$

$$\sigma_{zz|+z} = \sigma_{zz|-z} : \quad \left[a_{16} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta \right]_{|-z} = \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(\nabla U + b_6^{(j)} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} \Theta \right]_{|+z},$$

$$\sigma_{rz|+z} = \sigma_{rz|-z} : \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|-z} = b_9^{(j)} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{|+z},$$

$$-\Lambda^{(j)} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{-z} = -\Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{+z};$$

$$z = h \quad \nabla U + b_6^{(3)} \frac{\partial W}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} + b_7 \Theta = b_7 g, \quad (5.5)$$

Начальные условия определяются равенствами:

$$t = 0 \quad \{U, W, \phi, \Theta\} = 0. \quad (5.6)$$

Соотношения (5.4) являются условиями совместности перемещений, температуры, напряжений, идеального теплового контакта (граничные условия 4-го рода) и электрической зависимости на поверхности жёсткого соединения слоев.

Обозначения, которые используются в равенствах (5.1) – (5.6), представлены ниже:

$$\{U, W, r, z, h, h_1, h_2, h_3\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*, h_1^*, h_2^*, h_3^*\} / b, \quad \{\Theta, \omega_1, \omega_3\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \left[\{T, \omega_1^*, \omega_3^*\} - T_0 \right],$$

$$t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*, \quad b_1^{(j)} = \frac{(1 - 2\nu^{(j)})}{2(1 - \nu^{(j)})}, \quad b_2^{(j)} = \frac{1}{2(1 - \nu^{(j)})}, \quad b_3^{(j)} = \frac{C_{11}}{\gamma_{11}} \frac{\gamma^{(j)} (1 + \nu^{(j)}) (1 - 2\nu^{(j)})}{E^{(j)} (1 - \nu^{(j)})},$$

$$b_4^{(j)} = \frac{k^{(j)} \Lambda}{k \Lambda^{(j)}}, \quad b_5^{(j)} = T_0 \frac{\Lambda \gamma_{11} \gamma^{(j)}}{k \Lambda^{(j)} C_{11}}, \quad b_6^{(j)} = \frac{1 - \nu^{(j)}}{\nu^{(j)}},$$

$$b_7 = \alpha \frac{b}{\Lambda^{(3)}}, \quad b_8^{(j)} = \frac{\gamma^{(j)}}{\gamma_{11}}, \quad b_9^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{2 C_{55} (1 + \nu^{(j)})}.$$

5.2. Построение общего решения задачи

Неоднородные условия (5.2) приводятся к однородным путем введения новых функций $u(r, z, t)$, $\Phi(r, z, t)$, связанных с $U(r, z, t)$ $\Theta(r, z, t)$:

$$U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + u(r, z, t), \quad (5.7)$$

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + \Phi(r, z, t).$$

В результате подстановки (5.7) в (5.1) – (5.6) получаем краевую задачу относительно функций u, W, ϕ, Φ , в которой уравнения (4.1) для пьезокерамического материала принимают вид (4.6), а в аналогичной системе (5.1) третье равенство, а также начальные условия становятся неоднородными:

$$F_3^{(j)} = \left(b_4^{(j)} + b_5^{(j)} \right) \frac{d\omega_3}{dt}, \quad u = -\frac{r}{2} \omega_3(0), \quad \Phi = -\omega_3(0).$$

Кроме того, граничные и начальные условия (5.2) – (5.6) принимают следующий вид:

$$r = 0, 1 \quad \{u, W, \phi, \Phi\}_{|r=0} < \infty, \quad W_{|r=1} = 0, \quad \Phi_{|r=1} = 0, \quad (5.8)$$

$$\text{– пьезокерамический материал:} \quad \phi_{|r=1} = 0, \quad \left(\nabla u + a_{16} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{|r=1} = 0;$$

$$\text{– изотропный материал:} \quad \left(\nabla u + \frac{1}{b_6^{(j)}} \frac{\partial W}{\partial z} \right)_{|r=1} = 0;$$

$$z = 0 \quad \nabla u + b_6^{(1)} \frac{\partial W}{\partial z} = B_1, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \Phi = B_2; \quad (5.9)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \{u, W, \Phi\}_{|-z} = \{u, W, \Phi\}_{|+z}, \quad \phi_{|z=h_1} = \phi_0, \quad \phi_{|z=h_1+h_2} = 0, \quad (5.10)$$

$$\sigma_{zz|+z} = \sigma_{zz|-z} : \quad \left[a_{16} \nabla u + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Phi \right]_{|-z} - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(\nabla u + b_6^{(j)} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} \Phi \right]_{|+z} = B_3,$$

$$\sigma_{rz|+z} = \sigma_{rz|-z} : \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{|-z} = b_9^{(j)} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{|+z}, \quad -\Lambda^{(j)} \frac{\partial \Phi}{\partial z}_{|-z} = -\Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}_{|+z};$$

$$z = h \quad \nabla u + b_6^{(3)} \frac{\partial W}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} \Phi = B_4, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + b_7 \Phi = B_5, \quad (5.11)$$

$$t = 0 \quad u = u_0, \quad \{W, \phi\} = 0, \quad \Phi = \Phi_0, \quad (5.12)$$

$$\text{где} \quad B_1 = b_3^{(1)} b_6^{(1)} \omega_1 - \omega_3, \quad B_2 = \omega_1 - \omega_3, \quad B_3 = \left(a_7 - a_{16} + \frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} - b_8^{(j)} \right) \omega_3,$$

$$B_4 = (b_3^{(3)} b_6^{(3)} - 1) \omega_3, \quad B_5 = b_7 \vartheta - b_7 \omega_3, \quad u_0 = -\frac{r}{2} \omega_3(0), \quad \Phi_0 = -\omega_3(0).$$

Применение к краевой задаче относительно функций u, W, ϕ, Φ преобразования Ханкеля:

$$u_H(n, z, t) = \int_0^1 u(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \quad (5.13)$$

$$\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\} = \int_0^1 \{w(r, z, t), \phi(n, z, t), \Phi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$u(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (5.14)$$

$$\{w(r, z, t), \phi(n, z, t), \Phi(r, z, t)\} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(r, z, t)\}}{J_1(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

позволяет получить задачу относительно трансформант $u_H, w_H, \phi_H, \Theta_H$:

— для пьезокерамического материала - принимается система (4.12);

— для изотропного материала:

$$-j_n^2 u_H + b_1^{(j)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - b_2^{(j)} j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + b_3^{(j)} j_n \Theta_H = 0, \quad (5.15)$$

$$-b_1^{(j)} j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + b_2^{(j)} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - b_3^{(j)} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = 0,$$

$$-j_n^2 \Theta_H + \frac{\partial^2 \Theta_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[b_4^{(j)} \Theta_H + b_5^{(j)} \left(j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) \right] = F_{3H}^{(j)};$$

$$z = 0 \quad j_n u_H + b_6^{(1)} \frac{\partial w_H}{\partial z} = B_{1H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad \Theta_H = B_{2H}, \quad (5.16)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \{u_H, w_H, \Theta_H\}_{|z} = \{u_H, w_H, \Theta_H\}_{|+z}, \quad \phi_{H|z=h_1} = \phi_{0H}, \quad \phi_{H|z=h_1+h_2} = 0, \quad (5.17)$$

$$\sigma_{zz|+z} = \sigma_{zz|-z} : \quad \left[a_{16} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - a_7 \Theta_H \right]_{|z} - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(j_n u_H + b_6^{(j)} \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} \Theta_H \right]_{|+z} = B_{3H},$$

$$\sigma_{rz|+z} = \sigma_{rz|-z} : \quad \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right)_{|z} = b_9^{(j)} \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right)_{|+z}, \quad -\Lambda^{(j)} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} \Big|_{-z} = -\Lambda \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} \Big|_{+z};$$

$$z = h \quad j_n u_H + b_6^{(3)} \frac{\partial w_H}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} \Theta_H = B_{4H}, \quad \frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H = 0, \quad \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} + b_7 \Theta_H = B_{5H}, \quad (5.18)$$

$$t = 0 \quad u_H = u_{0H}, \quad \{w_H, \phi_H\} = 0, \quad \Theta_H = \Theta_{0H}, \quad (5.19)$$

где j_n – положительные нули функции $J_0(j_n)$, $u_{0H} = \int_0^1 u_0 r J_1(j_n r) dr$,

$$\{F_{3H}^{(j)}, B_{1H} \dots B_{5H}, \Theta_{0H}\} = \int_0^1 \{F_3^{(j)}, B_1 \dots B_5, \Phi_0\} r J_0(j_n r) dr.$$

Граничные условия (5.16) – (5.18) приводятся к однородным, путем введения новых функций $U_H, W_H, \varphi_H, \Phi_H$, связанных с $u_H, w_H, \phi_H, \Theta_H$, с учётом их кусочно–гладкого характера изменения по аксиальной координате, с помощью следующих соотношений:

$$u_H(n, z, t) = \sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + U_H(n, z, t), \quad (5.20)$$

$$w_H(n, z, t) = \sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + W_H(n, z, t),$$

$$\phi_H(n, z, t) = P_3^{(2)}(n, z, t) X^{(2)}(z) + \varphi_H(n, z, t),$$

$$\Theta_H(n, z, t) = \sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \Phi_H(n, z, t).$$

$$\text{Здесь } X^{(1)}(z) = H(h_1 - z), \quad X^{(2)}(z) = H(z - h_1) - H(z - h_1 - h_2),$$

$$X^{(3)}(z) = H(z - h_1 - h_2), \quad H(\dots) - \text{единичная функция Хэвисайда};$$

$f_1(z) \dots f_{41}(z)$ – дважды дифференцируемые функции.

$$\begin{aligned} P_m^{(1)} &= f_m(z) B_{1H}(t) + f_{m+2}(z) B_{3H}(t)|_{z=h_1} + f_{m+4}(z) B_{3H}(t)|_{z=h_1+h_2} + f_{m+6}(z) B_{4H}(t) + \\ &+ f_{m+8}(z) \phi_0(t), \quad P_m^{(3)} = f_{m+10}(z) B_{1H}(t) + f_{m+12}(z) B_{3H}(t)|_{z=h_1} + f_{m+14}(z) B_{3H}(t)|_{z=h_1+h_2} + \\ &+ f_{m+16}(z) B_{4H}(t) + f_{m+18}(z) \phi_0(t), \quad (m = 1, 2); \end{aligned}$$

$$P_m^{(2)} = \bar{P}_m^{(2)} + f_{m+32}(z) \phi_0(t), \quad P_4^{(j)}(n, z, t) = f_{j+35}(z) B_{2H}(t) + f_{j+38}(z) B_{5H}(t),$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_m^{(2)} &= f_{m+20}(z) B_{1H}(t) + f_{m+23}(z) B_{3H}(t)|_{z=h_1} + f_{m+26}(z) B_{3H}(t)|_{z=h_1+h_2} + f_{m+29}(z) B_{4H}(t), \\ &(m = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

В результате подстановки (5.20) в (4.12), (5.15) – (5.19), принимая во внимание условия:

$$z = 0 \quad j_n P_1^{(1)} + b_6^{(1)} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial z} = B_{1H}, \quad \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z} - j_n P_2^{(1)} = 0, \quad P_4^{(1)} = B_{2H}; \quad (5.21)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \left\{ P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_4^{(2)} \right\}_{|z} = \left\{ P_1^{(j)}, P_2^{(j)}, P_4^{(j)} \right\}_{|z}, \quad P_3^{(2)}|_{z=h_1} = \phi_{0H}, \quad P_3^{(2)}|_{z=h_1+h_2} = 0,$$

$$\left[a_{16} j_n P_1^{(2)} + a_4 \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial z} + a_6 \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial z} - a_7 P_4^{(2)} \right]_{|z} - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(j_n P_1^{(j)} + b_6^{(j)} \frac{\partial P_2^{(j)}}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} P_4^{(j)} \right]_{|z} = B_{3H},$$

$$\left(\frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial z} - j_n P_2^{(2)} \right)_{|z} = b_9^{(j)} \left(\frac{\partial P_1^{(j)}}{\partial z} - j_n P_2^{(j)} \right)_{|z}, \quad \frac{\partial P_4^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=h_1+h_2} - \frac{\Lambda^{(j)}}{\Lambda^{(2)}} \frac{\partial P_4^{(j)}}{\partial z} \Big|_{z=h_1+h_2} = 0, \quad (j = 1, 3);$$

$$z = h \quad j_n P_1^{(3)} + b_6^{(3)} \frac{\partial P_2^{(3)}}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} P_4^{(3)} = B_{4H}, \quad \frac{\partial P_1^{(3)}}{\partial z} - j_n P_2^{(3)} = 0, \quad \frac{\partial P_4^{(3)}}{\partial z} + b_7 P_4^{(3)} = B_{5H};$$

$$z = h \quad j_n H_1^{(3)} + b_6^{(3)} \frac{\partial H_2^{(3)}}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} H_4^{(3)} = B_{4H}, \quad \frac{\partial H_1^{(3)}}{\partial z} - j_n H_2^{(3)} = 0, \quad \frac{\partial H_4^{(3)}}{\partial z} + b_7 H_4^{(3)} = B_{5H},$$

получаем задачу относительно функций $U_H, W_H, \varphi_H, \Phi_H$:

– для пьезокерамического материала - система (4.17),

$$\text{где} \quad F_{1H}^* = \left(j_n^2 - a_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_1^{(2)} + a_2 j_n \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial z} - j_n P_4^{(2)} - a_3 j_n \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial z},$$

$$F_{2H}^* = \left(a_1 j_n^2 - a_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_2^{(2)} - a_2 j_n \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial z} + a_7 \frac{\partial P_4^{(2)}}{\partial z} + \left(a_5 j_n^2 - a_6 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_3^{(2)},$$

$$F_{3H}^* = F_{1H} + \left(a_8 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - j_n^2 \right) P_3^{(2)} + \left(a_{10} j_n^2 - a_{11} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_2^{(2)} - a_9 j_n \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial z} - \left(a_{12} j_n + a_{13} \frac{\partial}{\partial z} \right) P_4^{(2)},$$

$$F_{4H}^* = F_{2H} + \left(j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_4^{(2)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(P_4^{(2)} + a_{14} j_n P_1^{(2)} + a_{14} \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial^2 P_3^{(2)}}{\partial t \partial z};$$

– для изотропного материала:

$$-j_n^2 U_H + b_1^{(j)} \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - b_2^{(j)} j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + b_3^{(j)} j_n \Theta_H = R_{1H}^{(j)}, \quad (5.22)$$

$$-b_1^{(j)} j_n^2 W_H + \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + b_2^{(j)} j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - b_3^{(j)} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = R_{2H}^{(j)},$$

$$-j_n^2 \Theta_H + \frac{\partial^2 \Theta_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[b_4^{(j)} \Theta_H + b_5^{(j)} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) \right] = R_{3H}^{(j)};$$

$$z=0 \quad j_n U_H + b_6^{(1)} \frac{\partial W_H}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0, \quad \Theta_H = 0; \quad (5.23)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \{U_H, W_H, \Theta_H\}_{|z} = \{U_H, W_H, \Theta_H\}_{|+z}, \quad \varphi_{H|z=h_1} = \varphi_{H|z=h_1+h_2} = 0, \quad (5.24)$$

$$\left[a_{16} j_n U_H + a_4 \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - a_7 \Theta_H \right]_{|z} - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(j_n U_H + b_6^{(j)} \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - b_8^{(j)} \Theta_H \right]_{|+z} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H \right)_{|z} = b_9^{(j)} \left(\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H \right)_{|+z}, \quad -\Lambda^{(j)} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z}_{|z} = -\Lambda \frac{\partial \Theta_H}{\partial z}_{|+z};$$

$$z = h \quad j_n U_H + b_6^{(3)} \frac{\partial W_H}{\partial z} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} \Theta_H = 0, \quad \frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H = 0, \quad \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} + b_7 \Theta_H = 0, \quad (5.25)$$

$$t=0 \quad U_H = U_{0H}, \quad W_H = W_{0H}, \quad \varphi_H = \varphi_{0H}, \quad \Theta_H = \Theta_{0H}, \quad (5.26)$$

$$\text{где } R_{1H}^{(j)} = \sum_{j=1,3} \left[\left(j_n^2 - b_1^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_1^{(j)} + b_2^{(j)} j_n \frac{\partial P_2^{(j)}}{\partial z} - b_3^{(j)} j_n P_4^{(j)} \right] X^{(j)}(z),$$

$$R_{2H}^{(j)} = \sum_{j=1,3} \left[\left(b_1^{(j)} j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_2^{(j)} - b_2^{(j)} j_n \frac{\partial P_1^{(j)}}{\partial z} + b_3^{(j)} \frac{\partial P_4^{(j)}}{\partial z} \right] X^{(j)}(z),$$

$$R_{3H}^{(j)} = F_{3H}^{(j)} + \sum_{j=1,3} \left[\left(j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_4^{(j)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(b_4^{(j)} P_4^{(j)} + b_5^{(j)} j_n P_1^{(j)} + b_5^{(j)} \frac{\partial P_2^{(j)}}{\partial z} \right) \right] X^{(j)}(z),$$

$$U_{0H} = u_{0H} - \sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(n, z, 0) X^{(j)}(z), \quad W_{0H} = - \sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(n, z, 0) X^{(j)}(z),$$

$$\varphi_{0H} = -P_3^{(2)}(n, z, 0) X^{(2)}(z), \quad \Theta_{0H} = \Phi_{0H} - \sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(n, z, 0) X^{(j)}(z).$$

Начально - краевую задачу (4.17) – (4.19), (5.22) – (5.26) решаем, используя структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [106] с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_4(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$:

$$G(n, \lambda_{in}, t) = \int_0^h \left[b_{10} \Theta_H + b_{11} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - b_{12} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz, \quad (5.27)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), \varphi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z), N_4(\mu_{in}, z)\} \|K_{in}\|^{-2},$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_4(\lambda_{in}, z) N_4(\mu_{in}, z) dz,$$

$$\{b_{10}, b_{11}, b_{12}\} = \{b_4^{(1)}, b_5^{(1)}, 0\} X^{(1)} + \{1, a_{14}, a_{15}\} X^{(2)} + \{b_4^{(3)}, b_5^{(3)}, 0\} X^{(3)}.$$

В результате использования КИП получаем задачу для трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$:

$$\frac{dG_{in}}{dt} + \lambda_{in} G_{in} = F_H; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.28)$$

$$t = 0 \quad G_{in} = G_{0H}(n, z),$$

решение которых имеет вид:

$$G_{in} = G_{0H} \exp(-\lambda_{in} t) + \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_{in}(\tau - t) d\tau, \quad (5.29)$$

а также однородные задачи относительно $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_4(\lambda_{in}, z)$:

– для пьезокерамического материала (3.22):

$$\begin{aligned} -j_n^2 K_{1in}^{(2)} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}^{(2)}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz} - a_9 j_n \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz} + \lambda_{in}^2 a_{14} j_n K_{4in}^{(2)} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 K_{2in}^{(2)} + a_4 \frac{d^2 K_{2in}^{(2)}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} - a_{10} j_n^2 K_{3in}^{(2)} + a_{11} \frac{d^2 K_{3in}^{(2)}}{dz^2} - \lambda_{in}^2 a_{14} \frac{dK_{4in}^{(2)}}{dz} &= 0, \\ j_n^2 K_{3in}^{(2)} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}^{(2)}}{dz^2} - a_3 j_n \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{2in}^{(2)} + a_6 \frac{d^2 K_{2in}^{(2)}}{dz^2} + \lambda_{in}^2 a_{15} \frac{dK_{4in}^{(2)}}{dz} &= 0, \\ (\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_{4in}^{(2)} + \frac{d^2 K_{4in}^{(2)}}{dz^2} + j_n K_{1in}^{(2)} + a_7 \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz} + a_{12} j_n K_{3in}^{(2)} - a_{13} \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz} &= 0; \end{aligned} \quad (5.30)$$

– для изотропного материала ($j = 1, 3$):

$$\begin{aligned} -j_n^2 K_{1in}^{(j)} + b_1^{(j)} \frac{d^2 K_{1in}^{(j)}}{dz^2} - b_2^{(j)} j_n \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} + \lambda_{in} b_5^{(j)} j_n K_{4in}^{(j)} &= 0, \\ -b_1^{(j)} j_n^2 K_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{2in}^{(j)}}{dz^2} + b_2^{(j)} j_n \frac{dK_{1in}^{(j)}}{dz} - \lambda_{in} b_5^{(j)} \frac{dK_{4in}^{(j)}}{dz} &= 0, \\ (\lambda_{in} b_4^{(j)} - j_n^2) K_{4in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{4in}^{(j)}}{dz^2} + b_5^{(j)} j_n K_{1in}^{(j)} + b_5^{(j)} \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} &= 0; \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$z = 0 \quad j_n K_{1in}^{(1)} + b_6^{(1)} \frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz} = 0, \quad \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(1)} = 0, \quad K_{4in}^{(1)} = 0, \quad (5.32)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \left\{ K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{4in}^{(2)} \right\}_{|z} = \left\{ K_{1in}^{(j)}, K_{2in}^{(j)}, K_{4in}^{(j)} \right\}_{|z}, \quad K_{3in}|_{z=h_1} = K_{3in}|_{z=h_1+h_2} = 0, \quad (5.33)$$

$$\left[a_{16} j_n K_{1in}^{(2)} + a_4 \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz} + a_6 \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz} - a_7 K_{4in}^{(2)} \right]_{|z} - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(j_n K_{1in}^{(j)} + b_6^{(j)} \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} \right) \right]_{|z} = 0,$$

$$\left(\frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} - j_n K_{1in}^{(2)} \right)_{|z} = b_9^{(j)} \left(\frac{dK_{1in}^{(j)}}{dz} - j_n K_{1in}^{(j)} \right)_{|+z}, \quad -\Lambda^{(j)} \frac{dK_{4in}^{(j)}}{dz} \Big|_{-z} = -\Lambda \frac{dK_{4in}^{(2)}}{dz} \Big|_{+z};$$

$$z = h \quad j_n K_{1in}^{(3)} + b_6^{(3)} \frac{dK_{2in}^{(3)}}{dz} = 0, \quad \frac{dK_{1in}^{(3)}}{dz} - j_n K_{2in}^{(3)} = 0, \quad \frac{dK_{4in}^{(3)}}{dz} + b_7 K_{4in}^{(3)} = 0, \quad (5.34)$$

и относительно $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$:

— для пьезокерамического материала (3.27):

$$\begin{aligned} -j_n^2 N_{1in}^{(2)} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}^{(2)}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}^{(2)}}{dz} + a_3 j_n \frac{dN_{3in}^{(2)}}{dz} + j_n N_{4in}^{(2)} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 N_{2in}^{(2)} + a_4 \frac{d^2 N_{2in}^{(2)}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}^{(2)}}{dz} - a_5 j_n^2 N_{3in}^{(2)} + a_6 \frac{d^2 N_{3in}^{(2)}}{dz^2} - a_7 \frac{dN_{4in}^{(2)}}{dz} &= 0, \\ j_n^2 N_{3in}^{(2)} - a_8 \frac{d^2 N_{3in}^{(2)}}{dz^2} + a_9 j_n \frac{dN_{1in}^{(2)}}{dz} - a_{10} j_n^2 N_{2in}^{(2)} + a_{11} \frac{d^2 N_{2in}^{(2)}}{dz^2} + a_{12} j_n N_{4in}^{(2)} + a_{13} \frac{dN_{4in}^{(2)}}{dz} &= 0, \\ -j_n^2 N_{4in}^{(2)} + \frac{d^2 N_{4in}^{(2)}}{dz^2} + \mu_{in}^2 \left(N_{4in}^{(2)} + a_{14} j_n N_{1in}^{(2)} + a_{14} \frac{dN_{2in}^{(2)}}{dz} - a_{15} \frac{dN_{3in}^{(2)}}{dz} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (5.35)$$

— для изотропного материала ($j = 1, 3$):

$$\begin{aligned} -j_n^2 N_{1in}^{(j)} + b_1^{(j)} \frac{d^2 N_{1in}^{(j)}}{dz^2} - b_2^{(j)} j_n \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} + b_3^{(j)} j_n N_{4in}^{(j)} &= 0, \\ -b_1^{(j)} j_n^2 N_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{2in}^{(j)}}{dz^2} + b_2^{(j)} j_n \frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - b_3^{(j)} \frac{dN_{4in}^{(j)}}{dz} &= 0, \\ -j_n^2 N_{4in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{4in}^{(j)}}{dz^2} + \mu_{in}^2 \left[b_4^{(j)} N_{4in}^{(j)} + b_5^{(j)} \left(j_n N_{1in}^{(j)} + \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} \right) \right] &= 0; \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$z = 0 \quad j_n N_{1in}^{(1)} + b_6^{(1)} \frac{dN_{2in}^{(1)}}{dz} = 0, \quad \frac{dN_{1in}^{(1)}}{dz} - j_n N_{2in}^{(1)} = 0, \quad N_{4in}^{(1)} = 0, \quad (5.37)$$

$$z = h_1, h_1 + h_2 \quad \left\{ N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{4in}^{(2)} \right\}_{|z} = \left\{ N_{1in}^{(j)}, N_{2in}^{(j)}, N_{4in}^{(j)} \right\}_{|+z}, \quad N_{3in}^{(2)}|_{z=h_1} = N_{3in}^{(2)}|_{z=h_1+h_2} = 0, \quad (5.38)$$

$$\left[a_{16} j_n N_{1in}^{(2)} + a_4 \frac{dN_{2in}^{(2)}}{dz} + a_6 \frac{dN_{3in}^{(2)}}{dz} - a_7 N_{4in}^{(2)} \right]_{|z} - \left[\frac{b_8^{(j)}}{b_3^{(j)} b_6^{(j)}} \left(j_n N_{1in}^{(j)} + b_6^{(j)} \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} \right) - b_8^{(j)} N_{4in}^{(j)} \right]_{|+z} = 0,$$

$$\left(\frac{dN_{1in}^{(2)}}{dz} - j_n N_{1in}^{(2)} \right)_{|z} = b_9^{(j)} \left(\frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - j_n N_{1in}^{(j)} \right)_{|z}, \quad -\Lambda^{(j)} \frac{dN_{4in}^{(j)}}{dz} \Big|_{-z} = -\Lambda \frac{dN_{4in}^{(2)}}{dz} \Big|_{+z};$$

$$z = h \quad j_n N_{1in}^{(3)} + b_6^{(3)} \frac{dN_{2in}^{(3)}}{dz} - b_3^{(3)} b_6^{(3)} N_{4in}^{(3)} = 0, \quad \frac{dN_{1in}^{(3)}}{dz} - j_n N_{2in}^{(3)} = 0, \quad \frac{dN_{4in}^{(3)}}{dz} + b_7 N_{4in}^{(3)} = 0, \quad (5.39)$$

$$\text{где} \quad K_k(n, z, t) = \sum_{j=1}^3 K_k^{(i)}(n, z, t) X^{(j)}(z), \quad N_k(n, z, t) = \sum_{j=1}^3 N_k^{(i)}(n, z, t) X^{(j)}(z), \quad (k = 1 \dots 4);$$

$$F_H = \int_0^h \left[\left(F_{1H}^* K_{1in}^{(2)} + F_{2H}^* K_{2in}^{(2)} + F_{3H}^* K_{3in}^{(2)} + F_{4H}^* K_{4in}^{(2)} \right) X^{(2)} + \sum_{j=1,3} \left(R_{1H}^{(j)} K_{1in}^{(j)} + R_{2H}^{(j)} K_{2in}^{(j)} + R_{3H}^{(j)} K_{4in}^{(j)} \right) X^{(j)} \right] dz,$$

$$G_{0H}(n, z) = \int_0^h \left[b_{10} \Theta_{0H} + b_{11} \left(j_n U_{0H} + \frac{\partial W_{0H}}{\partial z} \right) - b_{12} \frac{\partial \varphi_{0H}}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz.$$

Решения систем (5.30), (5.35) для пьезокерамического материала построены в главе 3 диссертационного исследования (3.32). Системы (5.31), (5.36) исследовались в работе [129], для которых были получены замкнутые решения:

$$\begin{aligned} \{K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)}\} &= \{D_{1in}^{(j)}, E_{1in}^{(j)}\} \sin(A_{in}^{(j)} z) + \{D_{2in}^{(j)}, E_{2in}^{(j)}\} \cos(A_{in}^{(j)} z) + \{D_{3in}^{(j)}, E_{3in}^{(j)}\} \exp(j_n z) + \\ &+ \{D_{4in}^{(j)}, E_{4in}^{(j)}\} \exp(-j_n z) + \{D_{5in}^{(j)}, E_{5in}^{(j)}\} z \exp(j_n z) + \{D_{6in}^{(j)}, E_{6in}^{(j)}\} z \exp(-j_n z), \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} K_{2in}^{(j)} &= -D_{1in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \cos(A_{in}^{(j)} z) + D_{2in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \sin(A_{in}^{(j)} z) - D_{3in}^{(j)} \exp(j_n z) + D_{4in}^{(j)} \exp(-j_n z) + \\ &+ D_{5in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} - j_n z) \exp(j_n z) + D_{6in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} + j_n z) \exp(-j_n z), \\ K_{3in}^{(j)} &= \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{\lambda_{in} a_5^{(j)} j_n} \left[D_{1in}^{(j)} \sin(A_{in}^{(j)} z) + D_{2in}^{(j)} \cos(A_{in}^{(j)} z) \right] - a_3^{(j)} b_{6in}^{(j)} \left[D_{5in}^{(j)} \exp(j_n z) - D_{6in}^{(j)} \exp(-j_n z) \right], \\ N_{2in}^{(j)} &= -E_{1in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \cos(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \sin(A_{in}^{(j)} z) - E_{3in}^{(j)} \exp(j_n z) + E_{4in}^{(j)} \exp(-j_n z) + \\ &+ E_{5in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} - j_n z) \exp(j_n z) + E_{6in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} + j_n z) \exp(-j_n z), \\ N_{3in}^{(j)} &= \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{a_3^{(j)} j_n} \left[E_{1in}^{(j)} \sin(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \cos(A_{in}^{(j)} z) \right] - a_5^{(j)} b_{6in}^{(j)} \left[E_{5in}^{(j)} \exp(j_n z) + E_{6in}^{(j)} \exp(-j_n z) \right], \end{aligned}$$

где $e_{1in}^{(j)} = \xi_{in} e_4^{(j)} - 3j_n^2$, $e_{2in}^{(j)} = (3j_n^2 - 2\xi_{in} e_4^{(j)}) j_n^2$, $e_{3in}^{(j)} = (\xi_{in} e_4^{(j)} - j_n^2) j_n^4$, $e_4^{(j)} = b_3^{(j)} b_5^{(j)} + b_4^{(j)}$,

$$e_5^{(j)} = 1 + \frac{2b_1^{(j)} b_4^{(j)}}{b_3^{(j)} b_5^{(j)} + b_2^{(j)} b_4^{(j)}}, \quad e_{6in}^{(j)} = \frac{2b_1^{(j)}}{\xi_{in} (b_3^{(j)} b_5^{(j)} + b_2^{(j)} b_4^{(j)})}, \quad \xi_{in} = \lambda_{in} \text{ и } \xi_{in} = \mu_{in} \text{ при решении}$$

соответственно задач (5.31), (5.36), $A_{in}^{(j)}$ – действительный корень бикубического

$$\text{уравнения: } \left[\left(A_{in}^{(j)} \right)^2 \right]^3 - e_{1in}^{(j)} \left[\left(A_{in}^{(j)} \right)^2 \right]^2 + e_{2in}^{(j)} \left(A_{in}^{(j)} \right)^2 - e_{3in}^{(j)} = 0.$$

Подстановка (3.32), (5.40) в условия (5.32) – (5.34), (5.37) – (5.39) позволяет определить постоянные $D_{1in} \dots D_{7in}$, $E_{1in} \dots E_{7in}$ (3.32), $D_{1in} \dots D_{6in}$, $E_{1in} \dots E_{6in}$ ($j=1,3$) и собственные значения λ_{in} , μ_{in} .

Выражения для функций $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$, $\Theta(r, z, t)$ имеют следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} U(r, z, t) &= \frac{r}{2} \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[\sum_{j=1}^3 P_1^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\ W(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[\sum_{j=1}^3 P_2^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\ \phi(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[P_3^{(2)}(n, z, t) X^{(2)}(z) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\ \Theta(r, z, t) &= \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[\sum_{j=1}^3 P_4^{(j)}(n, z, t) X^{(j)}(z) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Функции $P_1^{(j)}(n, z, t) \dots P_4^{(j)}(n, z, t)$ определяются из условия упрощений правых частей (3.13), (5.22):

– для пьезокерамического материала:

$$\begin{aligned} \left(j_n^2 - a_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_1^{(2)} + a_2 j_n \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial z} - j_n P_4^{(2)} - a_3 j_n \frac{\partial P_3^{(2)}}{\partial z} &= 0, \\ \left(a_1 j_n^2 - a_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_2^{(2)} - a_2 j_n \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial z} + a_7 \frac{\partial P_4^{(2)}}{\partial z} + \left(a_5 j_n^2 - a_6 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P_3^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\left(a_8 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - j_n^2\right) P_3^{(2)} + \left(a_{10} j_n^2 - a_{11} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_2^{(2)} - a_9 j_n \frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial z} - \left(a_{12} j_n + a_{13} \frac{\partial}{\partial z}\right) P_4^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial^2 P_4^{(2)}}{\partial z^2} - j_n^2 P_4^{(2)} = 0;$$

– для изотропного материала ($j = 1, 3$):

$$\left(j_n^2 - b_1^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_1^{(j)} + b_2^{(j)} j_n \frac{\partial P_2^{(j)}}{\partial z} - b_3^{(j)} j_n P_4^{(j)},$$

$$\left(b_1^{(j)} j_n^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_2^{(j)} - b_2^{(j)} j_n \frac{\partial P_1^{(j)}}{\partial z} + b_3^{(j)} \frac{\partial P_4^{(j)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 P_4^{(j)}}{\partial z^2} - j_n^2 P_4^{(j)} = 0.$$

Разность потенциалов $V(t)$ с учётом заземления нижней лицевой электродированной поверхности на основании условия (2.8) определяется равенством:

$$V(t) = b_0 Q(t), \quad (5.42)$$

где

$$Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[j_n J_1(j_n) \right]^{-1} \left\{ \frac{a_{10}}{a_5} j_n \bar{P}_1^{(2)}(n, h_1, t) + a_{11} \frac{\partial \bar{P}_2^{(2)}(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - a_8 \frac{\partial \bar{P}_3^{(2)}(n, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_1} + a_{13} P_4^{(2)}(n, h_1, t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G(n, \lambda_{in}, t)}{\|K_{in}\|^2} \left[\frac{a_{10}}{a_5} j_n N_1(\lambda_{in}, h_1) + a_{11} \frac{dN_2(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=h_1} - a_8 \frac{dN_3(\lambda_{in}, z)}{dz} \Big|_{z=h_1} + a_{13} N_4(\mu_{in}, h_1) \right] \right\} + \left(\frac{a_{10}}{a_5} + a_{13} \right) \frac{\omega_3(t)}{4},$$

$$b_0 = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} j_n^{-2} \left[a_8 \frac{df_{35}(z)}{dz} \Big|_{z=h_1} - \frac{a_{10}}{a_5} j_n f_{33}(h_1) - a_{11} \frac{df_{34}(z)}{dz} \Big|_{z=h_1} \right] \right\}^{-1}.$$

5.3. Численный анализ результатов исследуемой задачи

Для выполнения численного анализа рассматривается пластина $b = 14 \times 10^{-3}$ м ($\alpha = 5.6$ Вт/(м² К)), состоящая из трёх слоев, изготовленная из металлической (стальной) подложки ($j=1$), слоя из пьезокерамического состава PZT-4 и термоизолирующего слоя из пластика ($j=3$). Изотропные материалы имеют следующие характеристики: $\{E^{(1)}, E^{(3)}\} = \{20, 0.33\} \times 10^{10}$ Па;

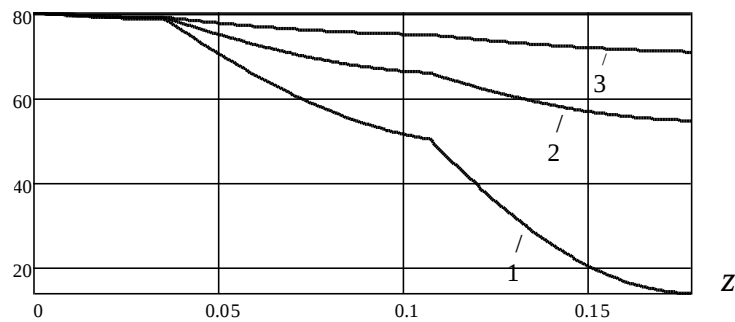
$$\{\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(3)}\} = \{50, 0.2\} \text{ Вт/(м К)}; \quad \{v^{(1)}, v^{(3)}\} = \{0.28, 0.33\};$$

$$\{k^{(1)}, k^{(3)}\} = \{3.8, 0.23\} \times 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \text{ К)}; \quad \{\alpha_t^{(1)}, \alpha_t^{(3)}\} = \{1.2, 8\} \times 10^{-5} \text{ 1/К}.$$

Изменение температурной нагрузки на верхней лицевой поверхности задаётся по зависимости (2.57). При этом температуры на цилиндрической поверхности $\omega_3^*(t_*)$ и внешней среды ϑ^* равны первоначальной температуре T_0 .

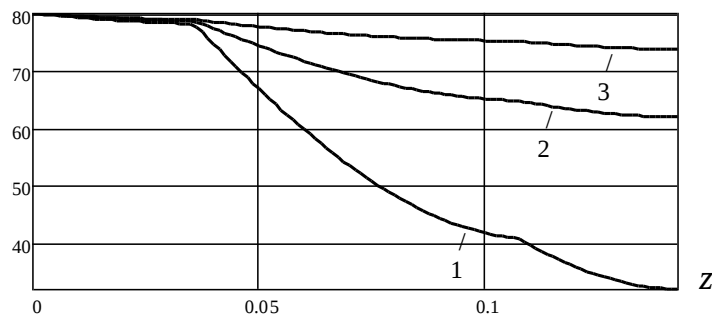
На рис. 5.2, 5.3 представлены графики $\{\Theta^*(0,z,t), W(0,z,t)\} - z$ в различные моменты времени t ($t_{\max}^* = 1$ с). Толщина металлической подложки $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ (м) и пьезокерамической пластины $h_2^* = 10^{-3}$ (м). Результаты получены для различных толщин термоизолирующего слоя h_3^* .

$\Theta^*(0,z,t), ^\circ\text{C}$



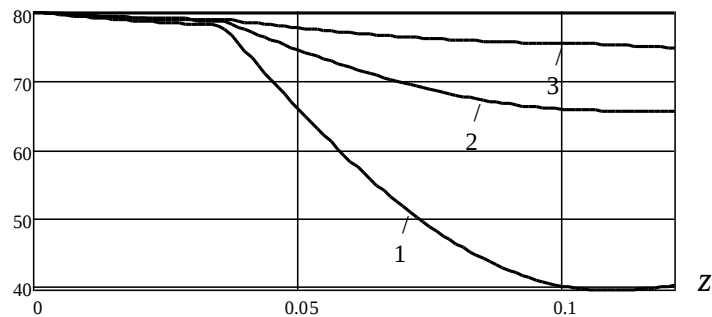
а) $h_3^* = 10^{-3}$ м ($h_3=0.072$, 3: $t = 12 t_{\max}$)

$\Theta^*(0,z,t), ^\circ\text{C}$



б) $h_3^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м ($h_3=0.036$, 3: $t = 10 t_{\max}$)

$\Theta^*(0,z,t), ^\circ\text{C}$

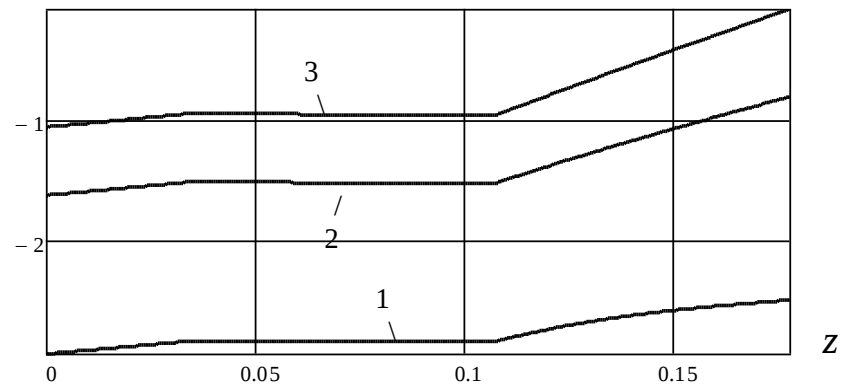


в) $h_3^* = 0.25 \times 10^{-3}$ м ($h_3=0.018$, 3: $t = 8 t_{\max}$)

Рис.5.2. Изменение $\Theta^*(0,z,t)$ по высоте пластины,

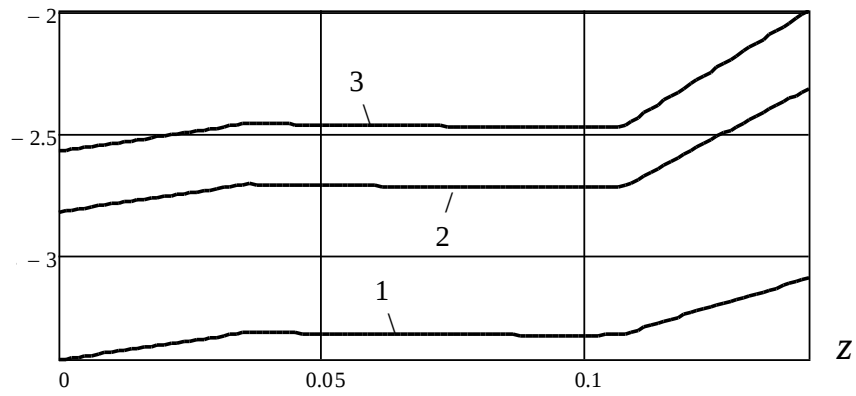
1: $t = t_{\max}$, 2: $t = 2 t_{\max}$

$$W(0, z, t) \times 10^3$$



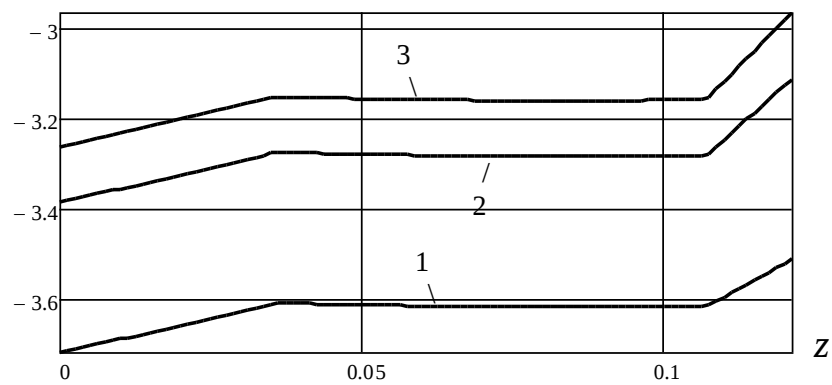
$$\text{a) } h_3^* = 10^{-3} \text{ M } (h_3=0.072, 3: t = 12 t_{\max})$$

$$W(0, z, t) \times 10^3$$



$$\text{б) } h_3^* = 0.5 \times 10^{-3} \text{ M } (h_3=0.036, 3: t = 10 t_{\max})$$

$$W(0, z, t) \times 10^3$$



$$\text{в) } h_3^* = 0.25 \times 10^{-3} \text{ M } (h_3=0.018, 3: t = 8 t_{\max})$$

Рис.5.3. Изменение $W(0, z, t)$ по высоте пластины,
1: $t = t_{\max}$, 2: $t = 2 t_{\max}$

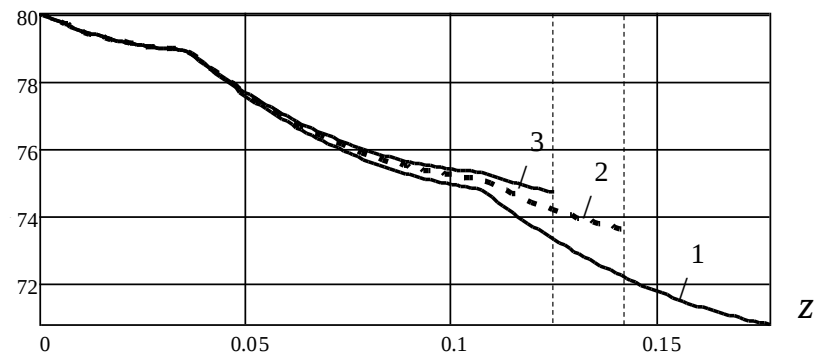
Выводы:

- 1) вследствие высокой теплопроводности металла (см. рис. 5.2) верхний слой ($j=1$) по высоте имеет практически одинаковую температуру в случае, когда температурная нагрузка достигает максимума при $t = t_{max}$;
- 2) толщина конструкции, особенно толщина изоляционного слоя, влияет на время, необходимое для установления устойчивого температурного режима (см. рис.5.2, графики 3);
- 3) вертикальные перемещения при $t = t_{max}$ вследствие «теплового удара» принимают наибольшие значения (см. рис.5.3, графики 1). При снижении их численных величин в результате прогрева всей конструкции (см. рис.5.3, графики 2, 3);
- 4) уменьшение толщины слоя из пластика приводит к росту температуры в пьезокерамическом слое, что увеличивает перемещения $W(0, z, t)$ (см. рис.5.3, графики 1, 2, 3).

На рис. 5.4 приведены графики изменения температуры $\Theta^*(0, z, t)$ и градиента вертикальных перемещений $\frac{\partial W(0, z, t)}{\partial z}$ пьезокерамического слоя по его толщине при установившемся температурном режиме ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $h_2^* = 10^{-3}$ м), а также изменение разности потенциалов между электродированными поверхностями пьезокерамической пластины $V(t)$ по времени. Результаты представлены также для различных толщин термоизолирующего слоя h_3^* .

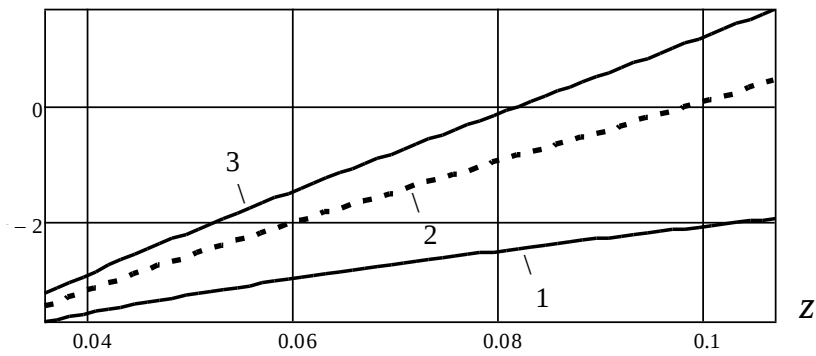
Здесь можно отметить, что увеличение толщины теплоизоляционного слоя из пластика приводит к уменьшению температуры на нижней части рассматриваемой конструкции (см. рис.5.4, а), что повышает величину относительных деформаций $\frac{\partial W}{\partial z}$ пьезокерамического слоя при $z = h_1$ (см. рис.5.4, б) и в результате увеличивает разность потенциалов $V(t)$ (см. рис.5.4, в).

$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



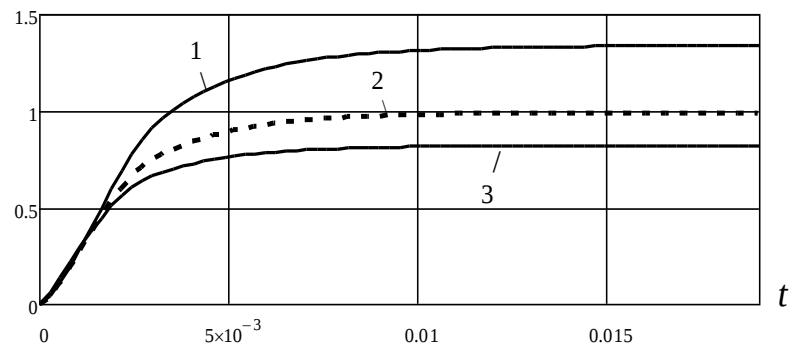
a)

$$\frac{\partial W(0, z, t)}{\partial z} \times 10^4$$



б)

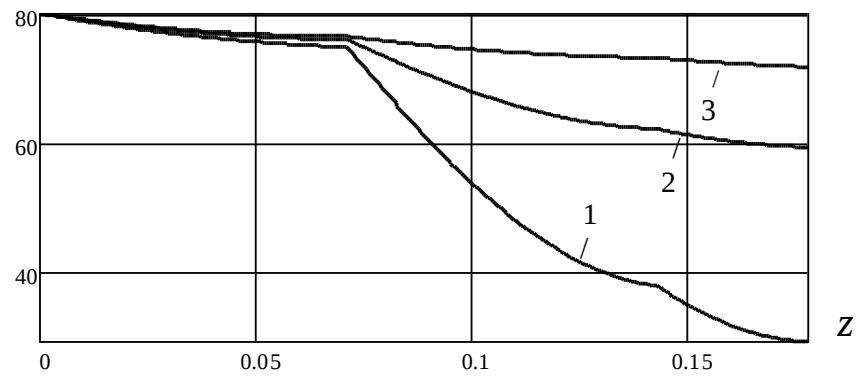
$$V(t) \times 10^6$$



в)

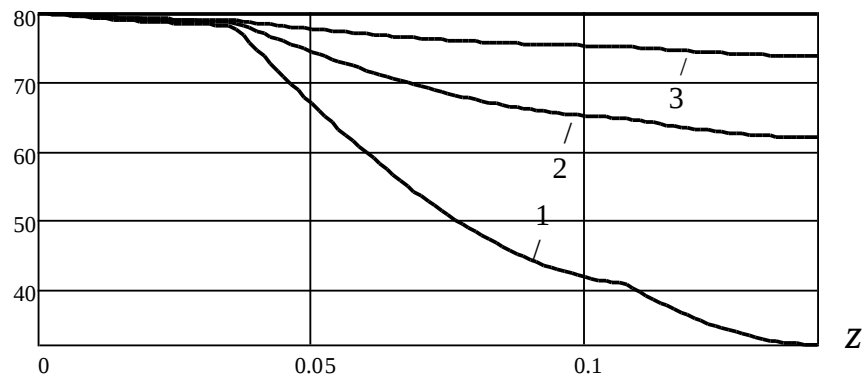
Рис.5.4. Изменение $\Theta^*(0, z, t)$, $\frac{\partial W(0, z, t)}{\partial z}$ по высоте в пьезокерамическом слое при установившемся температурном режиме (1: $h_3^* = 10^{-3}$ м, 2: $h_3^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м, 3: $h_1^* = 0.2 \times 10^{-3}$ м) и $V(t)$ по времени

$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



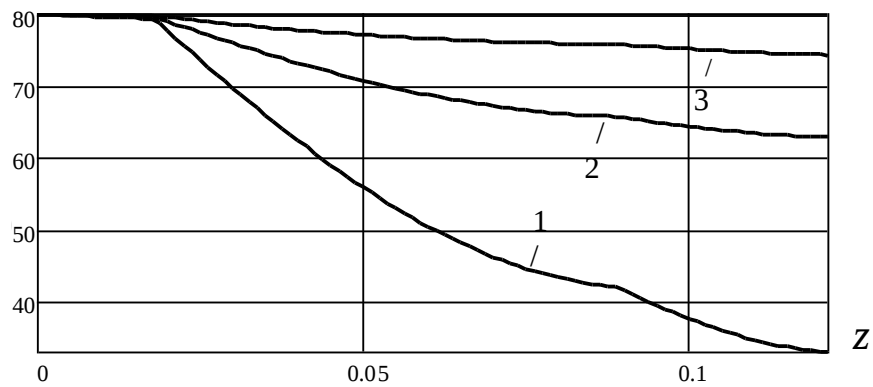
$$a) h_1^* = 10^{-3} \text{ м } (h_1 = 0.072)$$

$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



$$б) h_1^* = 0.5 \times 10^{-3} \text{ м } (h_1 = 0.036)$$

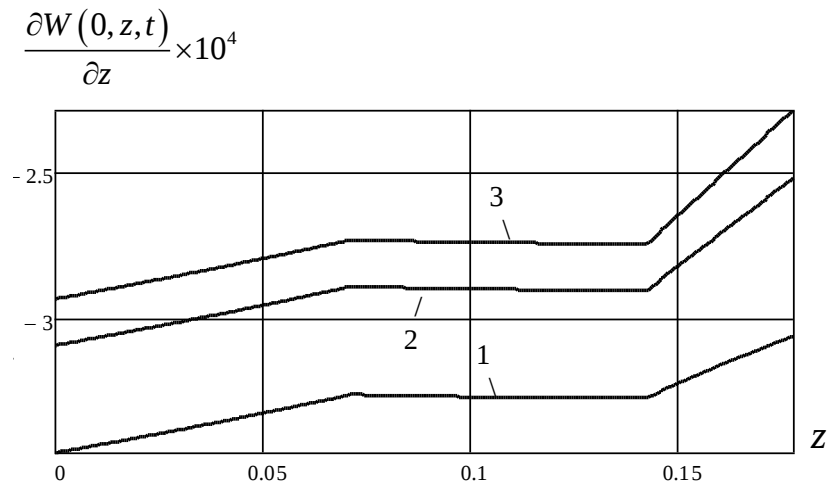
$$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$$



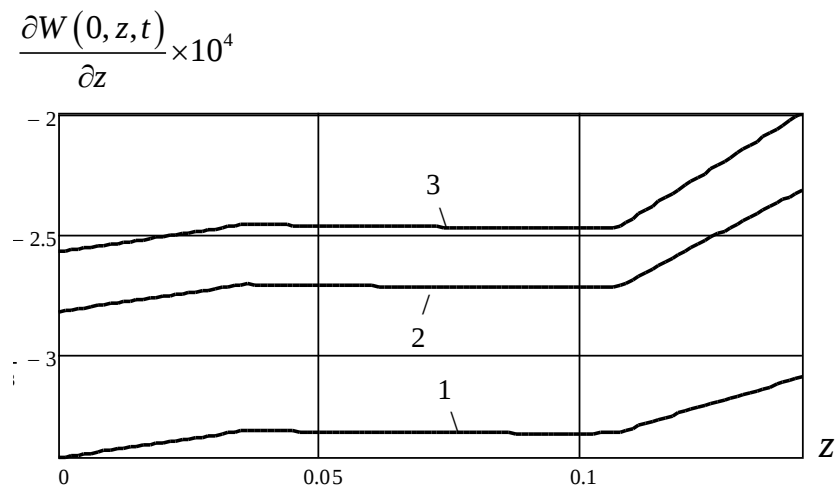
$$в) h_1^* = 0.25 \times 10^{-3} \text{ м } (h_1 = 0.018)$$

Рис.5.5. Изменение $\Theta^*(0, z, t)$ по высоте пластины,

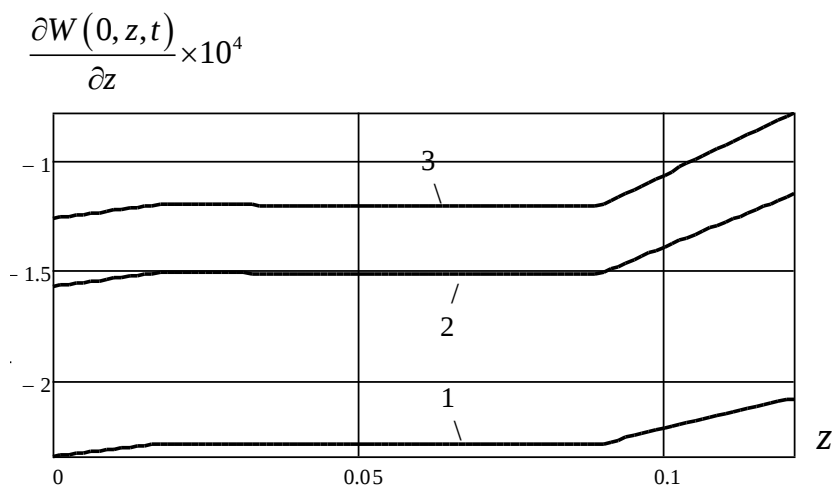
1: $t = t_{\max}$, 2: $t = 2 t_{\max}$, 3: $t = 10 t_{\max}$



а) $h_1^* = 10^{-3} \text{ м} (h_1 = 0.072)$



б) $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3} \text{ м} (h_1 = 0.036)$



в) $h_1^* = 0.25 \times 10^{-3} \text{ м} (h_1 = 0.018)$

Рис.5.6. Изменения $W(0, z, t)$ по высоте пластины,

1: $t = t_{\max}$, 2: $t = 2 t_{\max}$, 3: $t = 10 t_{\max}$

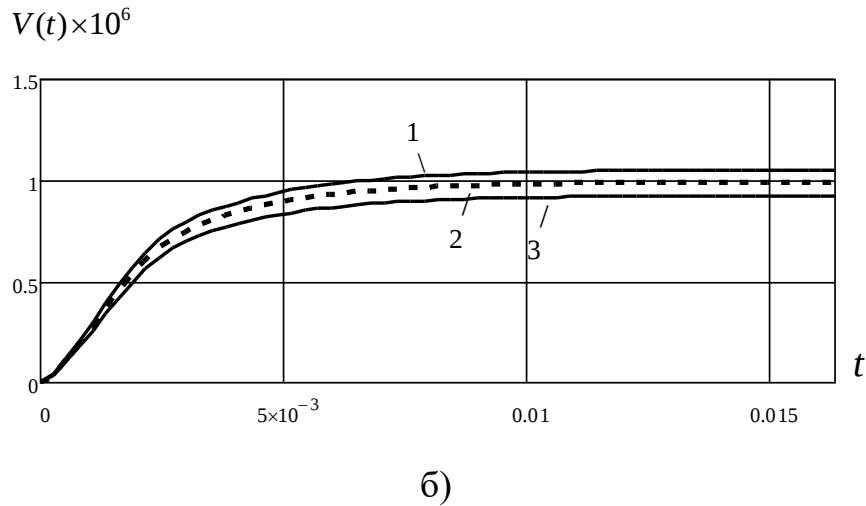
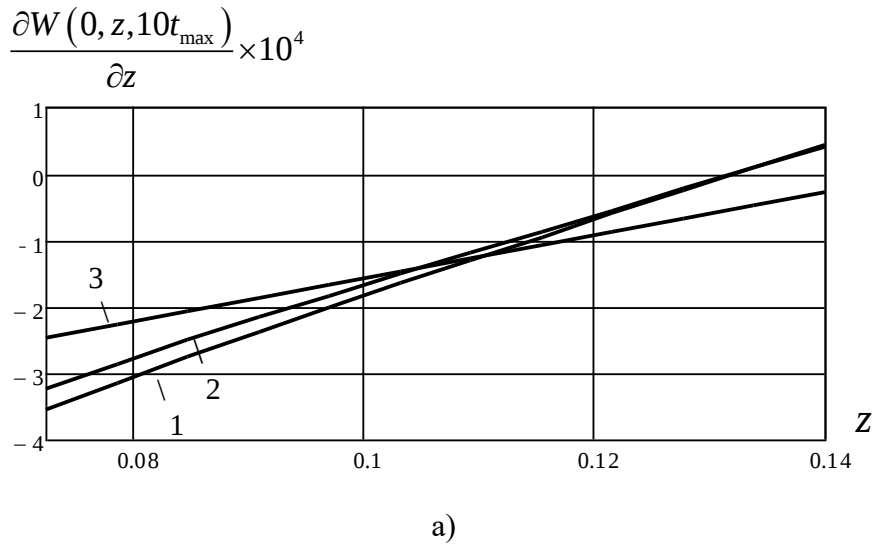


Рис.5.7. Изменение $\frac{\partial W(0, z, t)}{\partial z}$ по высоте пластины
при $t = 10 t_{max}$ и $V(t)$ по времени

(1: $h_1^* = 10^{-3}$ м, 2: $h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м, 3: $h_1^* = 0.25 \times 10^{-3}$ м)

На рис. 5.5, 5.6 представлены графики $\{\Theta^*(0, z, t), W(0, z, t)\} - z$ в различные моменты времени t ($h_2^* = 10^{-3}$ м, $h_3^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м). Результаты даны для различных толщин металлического слоя h_1^* .

Анализ результатов расчёта позволяет сделать **выводы**:

1) вследствие большой теплопроводности металла стальной слой при различной его толщине имеет практически одинаковую температуру (рис. 5.5);

2) при установившемся температурном режиме толщина металлической подложки не оказывает существенного влияния на величину температурного поля (см. рис.5.5, графики 3);

3) вертикальные перемещения при $t = t_{max}$ вследствие «теплого удара» принимают наибольшие значения (см. рис.5.5, графики 1); наблюдается снижение их численных величин в результате прогрева всей конструкции (см. рис.5.5, графики 2, 3);

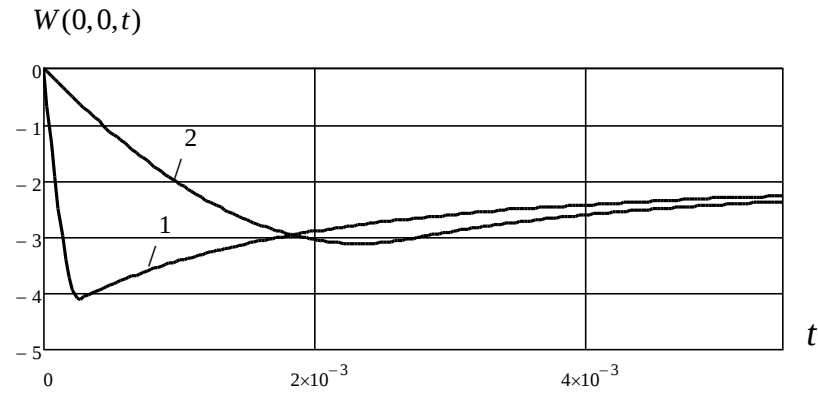
4) уменьшение толщины слоя из металла приводит к снижению численных значений $W(0, z, t)$ (см. рис.5.5, графики 1, 2, 3).

На рис. 5.7, а приведены графики $\frac{\partial W(0, z, t)}{\partial z} - z$ при установившемся температурном режиме ($h_1^* = 0.5 \times 10^{-3}$ м, $h_2^* = 10^{-3}$ м), а на рис. 5.7, б эпюры $V(t) - t$.

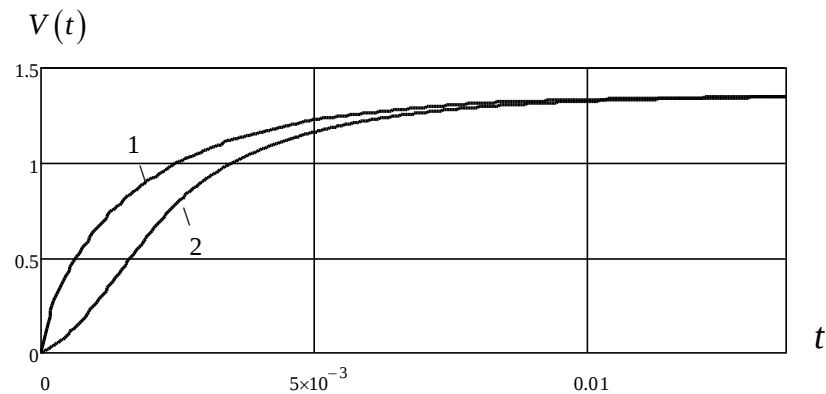
Необходимо подчеркнуть, что увеличение толщины металлической подложки приводит к росту относительных деформаций $\partial W / \partial z$ пьезокерамической пластины при $z = h_1$ (см. рис.5.7, а) и в результате к увеличению численных значений разности потенциалов $V(t)$ (см. рис.5.7, б).

На рис. 5.8 показаны графики $\{W(0,0,t), V(t)\} - t$ для случая одинаковых толщин всех слоев многослойного элемента ($h_1^* = h_2^* = h_3^* = 10^{-3}$ м). Позициями обозначены результаты для следующих режимов изменения температуры на верхней лицевой поверхности пластины: 1: $t_{max}^* = 0.1$ с, 2: $t_{max}^* = 1$ с.

Здесь стоит отметить, что рост скорости изменения температурной «нагрузки» в начальный момент времени приводит к увеличению перемещений и разности потенциалов на первом этапе работы элемента. При установившемся температурном режиме величины $W(0,0,t)$ и $V(t)$ не зависят от начальных условий.



а)



б)

Рис. 5.8. Изменение $W(0,0,t)$ и $V(t)$
по времени: 1: $t_{max}^* = 0.1$ с, 2: $t_{max}^* = 1$ с

На основании технического задания ООО «СМР-Проект» и выполненного анализа численных результатов были сформулированы практические рекомендации по выполнению проектных работ, связанных с разработкой датчиков температуры со встроенными пьезокерамическими многослойными пластинами (проектная марка опытного образца ДТ-ПЗ-11.2), что позволило существенно снизить объём натурных экспериментов и уровень материальных затрат:

- шарнирное закрепление многослойного элемента обеспечивает большую чувствительность датчика по сравнению жёстким защемлением;
- использование металлического слоя (подложки) приводит к увеличению прочностных параметров чувствительного элемента, поскольку пьезокерамика является достаточно хрупким материалом;

- нагрев подложки, вследствие высоких значений коэффициента температурного линейного расширения, приводит к росту деформаций металлического и пьезокерамического слоёв, что в результате приводит к увеличению индуцируемого электрического импульса;
- наличие теплоизолирующего слоя в конструкции позволяет увеличить температуру в пьезокерамике, что также способствует повышению чувствительности прибора.

Предприятие ООО «СЛЭНАКС», выполняющее разработку и выпускающее стационарные и подвижные энергетические установки, оборудованные электрическими генераторами с приводом от дизельного двигателя внутреннего сгорания (ДГУ), с целью расширения технических возможностей, провело испытания опытных моделей ДГУ в шумозащитном исполнении различной мощности, эксплуатация которых предполагается внутри производственных помещений. Опытный образец марки ДТ-ПЗ-11.2 был установлен внутри шумозащитного кожуха с последующей передачей полученных данных в электронный блок управления аварийного светового и звукового оповещения в случае нарушения целостности корпуса двигателя установки, сопровождающиеся выбросом пара и резким повышением температуры внутри станции. Ранее подобными датчиками установки не снабжались. ООО «СЛЭНАКС» отмечает положительный эффект результатов исследования, поскольку контроль за резким увеличением температуры внутри шумозащитного кожуха способствует своевременному оповещению эксплуатирующих лиц, с последующим аварийным отключением ДГУ, работающей в условиях ограниченного воздухообмена с окружающей средой.

Полученные в настоящей главе результаты применяются также при внутреннем техническом обучении специалистов по направлению проектирования систем контрольно-измерительных приборов и автоматики ООО «Волжский научно-исследовательский и проектный институт топливно-энергетического комплекса (Волга НИПИТЭК)».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы и результаты диссертационной работы:

1. Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглой сплошной пластины, имеющей жёсткое закрепление. С помощью разработанного алгоритма появляется возможность определить напряжённо - деформированное состояние рассматриваемой электроупругой системы, а также установить величину температурного поля без учёта скорости изменения её объёма. Кроме того, устанавливаются параметры температурной нагрузки, прикладываемой к элементу, при которых необходимо учитывать инерционные характеристики рассматриваемой системы.

2. Для круглых сплошных шарнирно и жёсткозакреплённых пластин, выполненных из пьезокерамического материала, разработан алгоритм расчёта, с помощью которого получены новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач термоэлектроупругости в трёхмерной постановке без учёта сил инерции при выполнении граничных условий теплопроводности 1 - го и 3 - го рода.

3. Для многослойных круглых пластин без учёта сил инерции построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости в трёхмерной постановке при выполнении граничных условий 1 - го и 3 - го рода.

4. Используя интегрированную систему математических, инженерно-технических и научных задач Mathcad–15.0, разработано программное обеспечение автоматизированного проектирования, благодаря которому становится возможным определить геометрические размеры элемента, площадь его электродного покрытия, выполнить подбор марки пьезокерамического материала, способ закрепления элемента, температурную нагрузку, величину электрического импульса. Оптимальное сочетание параметров позволяет наиболее эффективно преобразовать заданное внешнее температурное воздействие в электрический

сигнал. Варьируя введёнными параметрами, с помощью программного обеспечения становится возможным проводить анализ связанных и несвязанных термоэлектроупругих процессов в однослойных и многослойных круглых пластинах.

5. Построенные математические модели и разработанные алгоритмы расчётов для круглых сплошных однослойных и многослойных пластин применяются при проектировании датчиков температуры со встроенными пьезокерамическими пластинами (проектная марка разрабатываемого опытного образца ДТ-ПЗ-11.2) специалистами ООО «СМР-Проект», а также на предприятиях ООО «Энергоресурс», ООО «СЛЭНАКС», выполняющих разработку и осуществляющих производство энергетических установок со встроенными преобразователями. Кроме того, результаты диссертационной работы применяются при подготовке магистров по направлению подготовки «Строительство» профиля «Теория сооружений» Самарского государственного технического университета.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРИНЯТЫХ В РАБОТЕ ОБОЗНАЧЕНИЙ

b	– радиус пластины, м;
h^*	– толщина пластины, м;
t_*	– время в размерной форме, с;
S	– площадь электродного покрытия в безразмерной форме;
C_{ms}	– модули упругости анизотропного пьезокерамического материала $(m, s = \overline{1,5})$, Па;
$E^{(j)}$	– модуль упругости изотропного материала j - го слоя, Па;
$\nu^{(j)}$	– коэффициент Пуассона изотропного материала j - го слоя;
e_{ms}	– пьезомодули пьезокерамического материала $(m, s = \overline{1,5})$, Кл/м ² ;
ε_{ss}	– коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала $(m, s = \overline{1,5})$, Ф/м;
α_t	– коэффициент линейного температурного расширения пьезокерамического материала, К ⁻¹ ;
$\alpha_t^{(j)}$	– коэффициент линейного теплового расширения изотропного материала j - го слоя, К ⁻¹ ;
Λ	– коэффициент теплопроводности пьезокерамического материала, Вт/ (м К);
$\Lambda^{(j)}$	– коэффициент теплопроводности изотропного материала j - го слоя, Вт/ (м К);
k	– коэффициент объёмной теплоёмкости пьезокерамического материала, Дж/ (м ³ К);
$k^{(j)}$	– коэффициент объёмной теплоёмкости изотропного материала j - го слоя, Дж/ (м ³ К);
γ_{ss}	– компоненты тензора температурных напряжений $(s = \overline{1,3}), (\gamma_{ss} = C_{ss} \alpha_t)$;
$\gamma^{(j)}$	– компоненты тензора температурных напряжений изотропного материала j - го слоя, $\gamma^{(j)} = \frac{E^{(j)}}{(1 - 2\nu^{(j)})} \alpha_t^{(j)}$;
g_{ss}	– пироккоэффициенты $(s = \overline{1,3})$, Кл/ (м ² К);
T_0	– температура первоначального состояния тела, К(°С);

T	– текущая температура тела, $K(^{\circ}C)$;
Θ^*	– приращение температуры $(\Theta^* = T - T_0)$, $K(^{\circ}C)$;
$\omega_1^*(r_*, t_*)$	
$\omega_2^*(r_*, t_*)$	– функции изменения температуры, $K(^{\circ}C)$;
$\omega_2^*(r_*, t_*)$	
g^*	– температура окружающей среды, $K(^{\circ}C)$;
$T_{\max}^*, t_{\max}^*$	– максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме;
θ	– круговая частота вынужденных воздействий, c^{-1} ;
ψ	– круговая частота основного тона собственных осесимметричных колебаний, c^{-1} ;
$\phi_0^*(r, t)$	– электрический потенциал на верхней лицевой поверхности, индуцируемый в процессе деформирования пластины, В;
$U^*(r_*, z_*, t_*)$	
$W^*(r_*, z_*, t_*)$	– радиальные и аксиальные компоненты вектора перемещений, м;
$\phi^*(r_*, z_*, t_*)$	– потенциал электрического поля, В;
$\sigma_{ck}(r_*, z_*, t_*)$	– компоненты тензора механических напряжений $(c, k = r, z)$, Па;
$s(r_*, z_*, t_*)$	– объёмная плотность энтропии, Дж/ (моль К);
$D_r(r_*, z_*, t_*)$	– радиальная и аксиальная компоненты вектора индукции
$D_z(r_*, z_*, t_*)$	электрического поля, Кл/м ² ;
$\tilde{E}_z(r_*, z_*, t_*)$	– напряжённость электрического поля по аксиальной координате в безразмерной форме;
$V(t)$	– разность потенциалов в безразмерной форме;
R	– радиус раздела двух сплошных электродированных поверхностей в безразмерной форме;
∇	– дифференциальный оператор, $\nabla = \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*}$;
$H(...)$	– единичная функция Хэвисайда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авторское свидетельство № 182428 А1 СССР, МПК В06В 1/06. Способ поляризации пьезокерамики // № 948351/26-25: заявл. 24.03.1965: опубл. 25.05.1966 / Лезгинцева Т. Н., Фельдман Н. Б.
2. Акопян, В. А. Температурная стабильность модулей упругости пьезокерамики / В. А. Акопян. – Дефектоскопия. – 2004. – № 8. – С. 56-65.
3. Амбарцумян, С. А. Магнитоупругие колебания электропроводящей ортотропной цилиндрической оболочки в продольном магнитном поле / С. А. Амбарцумян, С. В. Саркисян. // Изв. нац. АН Армении. Механика. – 1997 (50). – № 3-4. – С. 3-16.
4. Аронов, Б. С. Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики / Б. С. Аронов. – Л.: Энергоатомиздат, Ленинградское отд. – 1990. – 272 с.
5. Аронов, Б. С. Об электромеханическом преобразовании энергии в пьезокерамических стержнях. / Б. С. Аронов // Акуст. ж. – 1980. – Т. 26. – № 3. – С. 456 - 459.
6. Афонин, С.М. Пьезопреобразователи для приводов микроперемещений / С. М. Афонин // Приборы и системы управления. – 1998. – № 2. – С. 41- 42.
7. Бате К. Численные метода анализа и метод конечных элементов. / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.
8. Белоконь, А. В. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости / А. В. Белоконь, К. А. Надолин, А. В. Наседкин, А. С. Скалиух, А. Н. Соловьев // ПММ. – 2000. – Т. 64, № 3. – С. 381-393.
9. Белоконь А. В. Расчет некоторых типов задач термоэлектроупругости с использованием пакетов ANSYS и ASELAN / А. В. Белоконь, А. В. Наседкин // Изв. вузов, Северо-Кавказский регион, специальный выпуск. – 2004. – С. 52-55.
10. Белоконь, А. В. О моделировании пьезоэлектрических устройств в конечно-элементном пакете ACELAN / А. В. Белоконь // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4-5. – С. 2007-2009.

11. Белосточный, Г. Н. Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной полой цилиндрической оболочки под действием периодической, по временной координате, нагрузки / Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2020. – Т. 24, № 3. – С. 583-594. – DOI: 10.14498/vsgtu1755.
12. Белянкова, Т. И. К моделированию преднапряженного термоэлектроупругого полупространства с покрытием / Т. И. Белянкова, В. В. Калинин // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. № 1. – С. 117-135.
13. Берлинкур, Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Яффе // Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир. – 1966. – Т. 1. – С. 204 - 326.
14. Бобцов, А.А. Исполнительные устройства и системы для микроперемещений / А. А. Бобцов, В. И. Бойков, С. В. Быстров, В. В. Григорьев. – СПб ГУ ИТМО. – 2011. – 131 с.
15. Вабищевич, П. Н. Численное моделирование задач термоупругости / П. Н. Вабищевич, М. В. Васильева // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова. – 2013. – Т. 10, № 3. – С. 5-9.
16. Ватульян, А. О. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости / А. О. Ватульян, А. Ю. Кирютенко, А. В. Наседкин // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – Т. 37, № 5 (219). – С. 135-142.
17. Ватульян, А. О. Задача Даниловской в термоэлектроупругости / А. О. Ватульян, А. Ю. Кирютенко, В. В. Федорова // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. – Ростов-на-Дону: ДГТУ. – 1997. – № 2. – С. 25-30.
18. Ватульян, А. О. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 117-126. – DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.10.

19. Ватульян, А. О. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2021. – Т. 163, № 2. – С. 181-196. – DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.
20. Ватульян, А. О. Исследование колебаний функционального-градиентного термовязкоупругого стержня / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. – Воронеж. – 2023. – С. 991-997.
21. Викторов, И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И. А. Викторов. – М.: Наука, 1966. – 168 с.
22. Гетман, И. П. Пьезоэлементы для трансформаторов вторичных источников питания и фильтров/ И. П. Гетман, Н. В. Курбатова, В. К. Яценко // Тезисы докладов науч.-тех. конференции «Теория и практика проектирования цифровой звуковой аппаратуры». – Ростов-на-Дону, 1990. – С. 91.
23. Головин, Н. Н. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси / Н. Н. Головин, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2009. – № 3(34). – С. 36-49.
24. Гринченко, В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
25. Гутин, Л. Я. Теория пьезоэлектрических вибраторов, применяемых в гидроакустике. / Л. Я. Гутин – Л.: Судостроение, 1977. – 272 с.
26. Даниловская, В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы / В. И. Даниловская // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14, вып. 3. – С. 316 - 318.
27. Даниловская, В. И. Об одной динамической задаче термоупругости / В. И. Даниловская // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т.16, вып. 3. – С.341-344.

28. Датчики: Справочное пособие / Под общ.ред. В.М. Шарапова, Е.Е. Полищука. – Москва: Техносфера, 2012. – 624 с.
29. Джагулов, Р. Г. Пьезокерамические элементы в приборостроении и автоматике. / Р. Г. Джагулов, А. А. Ерофеев. – М.: Машиностроение, 1986. – 282 с.
30. Ермолов, И. Н. Ультразвуковые пьезопреобразователи для неразрушающего контроля / И. Н. Ермолов, М. Б. Гитис, М. В. Королев и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 277 с.
31. Жигалин, А. Г. Замкнутые решения динамических задач связанной термоупругости для цилиндра и шара / А. Г. Жигалин, С. А. Лычев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 17-34.
32. Ильюшин, А. А. Сопротивление материалов / А. А. Ильюшин, В. С. Ленский. – М.: Физматгиз, 1959. – 372 с.
33. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости. / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с. – 2-е изд.
34. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 100 с. – 2-е изд.
35. Ильюшин, А. А. Задачи и упражнения по механике сплошной среды / А. А. Ильюшин, В. А. Ломакин, А. П. Шмаков / М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. – 164 с.
36. Калоеров, С. А. Определение термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных кусочно-однородных пьезопластин / С. А. Калоеров, Е. С. Глушанков // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 6 (352). – С. 88-101. – DOI: 10.15372/PMTF20180609.
37. Кальмова, М. А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для цилиндрического тела, выполненного из пьезокерамики / М. А. Кальмова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. – Воронеж, 2023. – С. 1044-1049.
38. Карнаухова, В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В. Г. Карнаухова. – Киев: Наук. думка, 1982. – 260 с.

39. Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М.: Высш. школа, 2001. – 550 с.
40. Карташов, Э. М. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости / Э. М. Карташов, В. А. Кудинов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 656 с.
41. Карташов, Э. М. Математические модели теплопроводности и термоупругости / Э. М. Карташов, В. А. Кудинов. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2013. – 877 с.
42. Кикучи, Е. Ультразвуковые преобразователи: пер. с англ. / Под ред. Е. Кикучи. – М.: Мир, 1972. – 424 с.
43. Кобзарь, В. Н. Плоская динамическая задача связанной термоупругости / В. Н. Кобзарь, Л. А. Фильштинский // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 5. – С. 842-851.
44. Ковалев, В. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев, Д. А. Семенов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, № 4-2. – С. 94-127. – DOI: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127.
45. Ковалев, В. А. Математическая теория связанных плоских гармонических термоупругих волн в микрополярных континуумах первого типа / В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 77-87. – DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-77-87.
46. Коваленко, А. Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин / А. Д. Коваленко. – Киев: АН УССР, 1955. – 302 с.
47. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины / А. Д. Коваленко. – М.: Физматгиз, 1959. – 294 с.
48. Коваленко, А. Д. Теория тонких конических оболочек и её приложение в машиностроении / А. Д. Коваленко, Я. М. Григоренко, Л. А. Ильин. – Киев: АН УССР, 1963. – 287 с.

49. Коваленко, А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко. – Киев: АН УССР, 1975. – 216 с.
50. Коваленко, А. Д. Избранные труды / А. Д. Коваленко; [ред. коллегия: акад. Г. С. Писаренко (отв. ред.) и др.] ; АН УССР, Ин-т механики. - Киев : Наук. думка, 1976. - 762 с.
51. Королев, М. В. Широкополосные ультразвуковые пьезопреобразователи / М. В. Королев, А. Е. Карпельсон. – М., Машиностроение, 1982. – 157 с.
52. Кременчугский, Л. С. Пироэлектрические приемные устройства / Л. С. Кременчугский, О. В. Ройцина. – Киев: Наукова думка, 1982. – 363 с.
53. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – Минск: Вышэйш. школа, 1975. – Т. 2. – 671 с.
54. Куликов, Г. М. Вариационные уравнения термоэлектروупругости для многослойной композитной оболочки / Г. М. Куликов, С. В. Плотникова, В. П. Ярцев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 628-637.
55. Куликов, Г. М. Управление формой слоистых композитных пластин с пьезоэлектрическими накладками при тепловом нагружении на основе метода отсчетных поверхностей / Г. М. Куликов, С. В. Плотникова // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2021. – № 5. – С. 45-63. – DOI: 10.31857/S0572329921040085.
56. Купрадзе, В. Д. Граничные задачи термоупругости / В. Д. Купрадзе, Т. В. Бурчуладзе // Дифф. Уравнения. – 1969. – Т. 5, № 1. – с.3 - 43.
57. Кусаева, Ж. М. Исследование связанных нестационарных термоупругих полей в однослойных и многослойных круглых пластинах: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / Кусаева Жанслу Маратовна. – 2022. – 128 с.
58. Ламзюк, В. Д. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований / В. Д. Ламзюк, А. К. Приварников // Днепрпетровск: Изд-во Днепрпетровского гос. ун-та. – 1978. – вып. 1, 2. – с.100.

59. Ландау, Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Госиздат. техн. – теорет. лит., 1959. – 532 с.
60. Лебедев, Я. Я. Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте / Я. Я. Лебедев // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114. – № 3. – с. 513-516.
61. Лыков, А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – Москва; Ленинград: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.
62. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
63. Лыков, А. В. Некоторые аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности / А. В. Лыков // Изв. АН СССР, серия «Энергетика и транспорт». – 1969. – № 2. – С. 3 - 27.
64. Лычев, С. А. Законы сохранения в недиссипативной термомеханике / С. А. Лычев, Д. А. Семенов // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. – 2008. – № 2 (61). – С. 183-217.
65. Лычев, С. А. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости / С. А. Лычев, А. В. Манжиров, С. В. Юбер // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2010. – № 4. – С. 138-154.
66. Лычев, С. А. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации / С. А. Лычев, А. В. Манжиров // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77, № 4. – С. 585-604.
67. Лычев, С. А. Осесимметричное наращивание полого гиперупругого цилиндра / С. А. Лычев, А. В. Марк // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 2. – С. 209-227. – DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-2-209-227.
68. Лычев, С. А. Нелинейная эволюционная задача для самонапряженных слоистых гиперупругих сферических тел / С. А. Лычев, Т. Н. Лычева, К. Г. Койфман // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 1. – С. 43-59. – DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.04.

69. Лычев, С. А. Остаточные напряжения в термоупругом цилиндре, возникающие в результате послойной наплавки / С. А. Лычев, М. Фекри // Вестник Самарского университета. Естественная серия. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 63-90. – DOI: 10.18287/2541-7525-2020-26-3-63-90.
70. Можен, Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
71. Мэзон, У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке / У. Мэзон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 447 с.
72. Наседкин, А. В. Конечно-элементный анализ пьезогенераторов 1-3 связности со стержнями из пористой пьезокерамики в пакете ANSYS / А. В. Наседкин, А. С. Турлюн // Физика бессвинцовых пьезоактивных и родственных материалов. Моделирование экосистем (Анализ современного состояния и перспективы развития): Труды Одиннадцатого Международного междисциплинарного молодежного симпозиума «LFPM-2022», Ростов-на-Дону, 26–28 декабря 2022 года. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2022. – С. 173-176. – Том 2.
73. Неразрушающий контроль: справочник: в 8 т. / под ред. В. В. Клюева. – Изд. 2-е, перераб. и испр. – М.: Машиностроение, 2006. – (Справочник).
74. Никишин, В. С. Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред / В. С. Никишин, Г. С. Шапиро // Труды ВЦ АН СССР. – М., 1970. – 260 с.
75. Никишин, В. С. Задачи теории упругости для многослойных сред / В. С. Никишин, Г. С. Шапиро. – М.: Наука, 1973. – 130 с.
76. Новацкий, В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М.: Из-во АН СССР, 1962. – 364 с.
77. Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – Пер. с пол. Я. Рыхлевского; под ред. Г. С. Шапиро. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
78. Новацкий, В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М.: Из-во АН СССР, 1975. – 872 с.

79. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
80. Новожилов, Ю. В. Электродинамика / Ю. В. Новожилов, Ю. А. Яппа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
81. Паньков, А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектrolюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма / А. А. Паньков // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – № 2. – С. 72 - 82.
82. Партон, В.З. Электроупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 470 с.
83. Петришин, В. И. Основные граничные задачи теории упругости для многослойных оснований / В. И. Петришин, А. К. Приварников // Прикладная механика. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 58 - 66.
84. Победря, Б. Е. О связанных задачах механики сплошной среды / Б. Е. Победря // Упругость и неупругость. – М.: Изд-во Моск. ун-та. – 1971. – вып. 2. – С. 224 - 253.
85. Победря, Б. Е. Некоторые общие теоремы МДТТ / Б. Е. Победря // ПММ. – 1979. – Т. 43, № 3. – С.531 - 541.
86. Победря, Б. Е. Новая постановка задачи МДТТ в напряжениях / Б. Е. Победря // ДАН СССР. – 1980. – Т. 253, № 2. – С. 295 - 297.
87. Победря, Б. Е. Квазистатическая задача МДТТ в напряжениях / Б. Е. Победря // ПММ. – 1981. – № 2. – С. 205 -214.
88. Победря, Б. Е. Определяющие соотношения связанных полей / Б. Е. Победря // Изв. РАН. Мех. тверд, тела. – 1992. – № 3. – С. 101 - 108.
89. Подстригач, Я. С. Прикладная механика / Я. С. Подстригач // Киев. – 1960. – Т. 6, № 2. – С. 101 – 108.
90. Подстригач, Я. С. Некоторые общие вопросы теории термоупругости и теплопроводности тонких оболочек / Я. С. Подстригач // «Теория пластин и оболочек». – Киев: АН УССР. – 1962. – С. 101 – 108.

91. Подстригач, Я. С. Квазистатическая задача взаимосвязанной термоупругости / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец // Прикл. Механика. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 43 – 45.
92. Поляков, В. Е. Ультразвуковой контроль качества конструкций / В. Е. Полякова, А. И. Потапов, А. К. Сборовский. – Л.: Судостроение, 1978. – 200 с.
93. Пьезоэлектрические датчики / Под общ.ред. В. М. Шарапова. – Москва: Техносфера, 2006. – 632 с.
94. Пьезокерамические преобразователи: справочник /С. И. Пугачев и др. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
95. Раппопорт, Р. М. К вопросу о построении решения трехмерной задачи теории упругости для многослойного полупространства в перемещениях / Р. М. Раппопорт // Изв. ВНИИ гидротехники. – 1966. – № 81. – С. 149 - 154.
96. Родионов, А. Ю. Точные решения уравнений термоупругости / А. Ю. Родионов // Владикавказский математический журнал. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 54-62.
97. Савинова, Е. В. Влияние температурных полей в задаче термоэлектроупругости для круглой жесткозакрепленной пластины / Е. В. Савинова // Фундаментальные и прикладные аспекты развития современной науки: Сборник трудов по материалам XV Международного конкурса научно-исследовательских работ, Уфа, 04 декабря 2023 года. – Уфа, 2023. – С. 46-53.
98. Савинова, Е. В. Задача термоэлектроупругости в динамической постановке для плоского твердого тела малой толщины / Е. В. Савинова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 04–06 декабря 2023 года. – Воронеж, 2024. – С. 1170 – 1175.
99. Савинова, Е. В. Оценка влияния связности температурных и упругих полей на напряженно-деформированное состояние круглой жесткозакрепленной пластины / Е. В. Савинова // Актуальные вопросы науки и практики: Сборник научных статей по материалам XIII Международной научно-практической конференции, Уфа, 08 декабря 2023 года. – Уфа, 2023. – С. 61– 69.

100. Савинова, Е. В. Исследование несвязанных термоэлектроупругих полей в жесткозакрепленной круглой пластине / Е. В. Савинова // Математическое моделирование и краевые задачи: материалы XII Всероссийской научной конференции с международным участием : в 2 т., Самара, 17–19 сентября 2024 года. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2024. – С. 89 – 94.

101. Савинова, Е. В. Исследование связанных термоэлектроупругих полей в шарнирно закрепленной круглой пластине / Е. В. Савинова // Математическое моделирование и краевые задачи : материалы XII Всероссийской научной конференции с международным участием : в 2 т., Самара, 17–19 сентября 2024 года. – Самара: Самарский государственный технический университет. – 2024. – С. 95-100.

102. Сеницкий, Ю. Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра / Ю. Э. Сеницкий // Прикл. механика. – 1981. – Т.17, №8. – С. 95 - 100.

103. Сеницкий, Ю. Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы / Ю. Э. Сеницкий // Прикл. механика АН УССР. – 1982. – Т. 18, № 6. – С. 34 - 41.

104. Сеницкий, Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований / Ю. Э. Сеницкий. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. – 174 с.

105. Сеницкий, Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики / Ю. Э. Сеницкий // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 57- 63.

106. Сеницкий, Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики / Ю.Э. Сеницкий // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 71 - 81.

107. Сеницкий, Ю. Э. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложение / Ю. Э. Сеницкий, С. А. Лычев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1999. – № 8. – С. 60 - 69.

108. Смажевская, Е. Г. Пьезоэлектрическая керамика / Е. Г. Смажевская, Фельдман Н. В. – М.: Советское радио, 1971. – 199 с.
109. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье / И. Н. Снеддон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
110. Соловьев, А. Н. Прикладная теория изгибных колебаний пьезоактивного биморфа в рамках несвязной краевой задачи термоэлектродупругости / А. Н. Соловьев, В. А. Чебаненко, М. С. Германчук // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2023. – Т. 69, № 2. – С. 364-374. – DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374.
111. Стеклов, В. А. Основные задачи математической физики для тел линейных размеров / В. А. Стеклов. – М., 1922. – Ч. 1. – 285 с.
112. Титчмарш, Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э. Ч. Титчмарш. – М. – Л., 1948. – 480 с.
113. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М. – 1966. – 735 с.
114. Фильштинский, Л. А. Двумерные фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Сиренко // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 157-161.
115. Фирсанов, В. В. Напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термоэлектрического воздействия на основе уточненной теории / В. В. Фирсанов, Л. Х. Нгуен // Тепловые процессы в технике. – 2020. – Т. 12. – № 3. – С. 110-117.
116. Христич, Д. В. Решение краевых задач нелинейной термоупругости / Д. В. Христич, М. Ю. Соколова // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2010. – № 1. – С. 123-136.
117. Шляхин, Д. А. Динамическая осесимметричная задача прямого пьезоэффекта для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра / Д. А. Шляхин // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 1(299). – С. 153-161.

118. Шляхин, Д. А. Несвязанная осесимметричная динамическая задача обратного пьезоэффекта для радиально поляризованного цилиндра / Д. А. Шляхин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – № 5(21). – С. 190-203.

119. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины / Д.А. Шляхин // Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучная серия. – 2012. – №6(97). – С. 124-135.

120. Шляхин, Д. А. Нестационарная осесимметричная задача обратного пьезоэффекта для круглой биморфной пластины ступенчато-переменной толщины и жесткости / Д. А. Шляхин // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2013. – № 6(107). – С. 133-140.

121. Шляхин, Д.А. Динамическая задача электроупругости для толстой круглой жесткозакрепленной пьезокерамической пластины / Д.А. Шляхин // Вестник Оренбург. гос. ун-та. – 2013. – №9. – С. 288-232.

122. Шляхин, Д.А. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жесткозакрепленной пьезокерамической пластины / Д.А. Шляхин // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №4. – С. 90 -100.

123. Шляхин, Д. А. Подбор геометрических размеров ультразвукового пьезокерамического преобразователя / Д. А. Шляхин, О. В. Казакова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность: сб. / под ред.: М. И. Бальзанникова, К. С. Галицкова, Ю. Э. Сеницкого; Самарский государственный архитектурно-строительный университет. – Самара, 2016. – С. 211-214.

124. Шляхин, Д. А. Вынужденные осесимметричные колебания круглых многослойных биморфных пластин / Д. А. Шляхин, О. В. Ратманова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 21, № 4. – С. 773-785. – DOI: 10.14498/vsgtu1564.

125. Шляхин, Д. А. Нестационарная задача обратного пьезоэффекта для многослойной пластины / Д. А. Шляхин, О. В. Казакова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Естественные науки и техносферная безопасность : сб. – Самара : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2017. – С. 187-191.

126. Шляхин, Д. А. Оптимальное конструктивное решение круглых многослойных биморфных пластин / Д. А. Шляхин, О. В. Ратманова // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2019. – № 1 (85). – С. 1. – DOI: 10.18698/2308-6033-2019-1-1844.

127. Шляхин, Д. А. Оптимальный выбор геометрических размеров круглых биморфных пьезокерамических пластин / Д. А. Шляхин, О. В. Ратманова // Вестник Башкирского университета. – 2019. – Т. 24, № 1. – С. 22-29.

128. Шляхин, Д. А. Нестационарная задача термоэластостатики для длинного пьезокерамического цилиндра / Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – № 2. – С. 181-190. – DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.16.

129. Шляхин, Д. А. Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жесткозакрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований / Д. А. Шляхин, Ж. М. Кусаева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25, № 2. – С. 320-342.

130. Шляхин, Д. А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэластостатики для длинного полого пьезокерамического цилиндра / Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2022. – Т. 22, № 2. – С. 81-90. – DOI: 10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90.

131. Шляхин, Д. А. Динамическая несвязанная задача термоэластостатики для круглых пластин / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство и строительные технологии: сб. статей 79-й всероссийской научно-технической конференции, Самара, 18–22 апреля 2022 года / под редакцией М. В. Шувалова, А.

А. Пищулева, А. К. Стрелкова. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2022. – С. 855-860.

132. Шляхин, Д. А. Нестационарная задача термоэластостатики для круглой пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13–15 декабря 2021 года. – Воронеж, 2022. – С. 1374-1379.

133. Шляхин, Д. А. Динамическая задача термоэластостатики для круглой жесткозакрепленной пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова, В. А. Юрин // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2022. – № 1(50). – С. 3-16. – DOI: 10.24866/2227-6858/2022-1/3-16.

134. Шляхин, Д. А. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэластостатики для круглой пьезокерамической шарнирно закрепленной пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2023. – Т. 27, № 1. – С. 159-178. – DOI: 10.14498/vsgtu1959.

135. Шляхин, Д. А. Решение динамической задачи термоэластостатики для круглой пластины методом конечных интегральных преобразований / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство и строительные технологии: сборник статей 80-й Юбилейной всероссийской научно-технической конференции, Самара, 17–22 апреля 2023 года / под ред. М. В. Шувалова, А. А. Пищулева, А. К. Стрелкова. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2023. – С. 799-807.

136. Шляхин, Д. А. Связанная осесимметричная задача термоэластостатики для круглой жесткозакрепленной пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2024. – Т. 24, № 1. – С. 23-35. – DOI: 10.23947/2687-1653-2024-24-1-23-35.

137. Шляхин, Д. А. Исследование для пластины из пьезокерамического материала задачи термоэластостатики / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство и

строительные технологии: сборник статей 81-й Всероссийской научно-технической конференции, Самара, 15–19 апреля 2024 года. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2024. – С. 818-824.

138. Шляхин, Д. А. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой многослойной пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2025. – № 3(780). – С. 16-29.

139. Шевляков, Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред / Ю. А. Шевляков. – Киев ; Одесса: Вища школа, 1977. – 215 с.

140. Учет связанности физических полей в динамических задачах для многослойных сред / О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова, М. В. Самойлов, Р. Г. Маслов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2010. – Т. 7, № 1. – С. 54-60.

141. Яффе, Б. Пьезоэлектрическая керамика / Б. Яффе, У. Кук, Г. Яффе. – М.: Мир. – 1974. – 288 с.

142. Alashti, R. A. Three-dimensional thermo-elastic analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method / R. A. Alashti, M. R. Khorsand // International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2011. – no 88. – Pp.167-180.

143. Alshaikh, F. The Mathematical Modelling for Studying the Influence of the Initial Stresses and Relaxation Times on Reflection and Refraction Waves in Piezothermoelastic Half-Space / F. Alshaikh // Applied Mathematics, 2012. – Vol. 3, no 8. – Pp. 819-832. – DOI:10.4236/am.2012.38123.

144. Argyris, J. Triangular Elements with Linearly Varying Strain for the Matrix Displacement Method / J. Argyris // J. Royal Aero. Sci. Tech, 1965. – no 69. – Pp. 711-713.

145. Azizzadeh, A. Static and natural frequency investigation of FGP beams considering thermal effects and design parameters / A. Azizzadeh, B. Behjat // J. Eng. Appl. – 2023. – S.70. – 92 p.– DOI: org/10.1186/s44147-023-00250-4.

146. Baptiste, J. Theorie de la propagation de la chaleur dans les solides / J. Baptiste, J. Fourier // Nouveau Bulletin des Sciences par la Societui philomathique de Paris. 1808. – T. I, no. 6 – Pp. 112-116.

147. Bassiouny, E. Two-temperature generalized thermopiezoelasticity of finite rod subjected to different types of thermal loading / E. Bassiouny, H. M. Youssef // J. Therm. Stresses. – 2008. – Vol. 31, no. 3. – Pp. 233-245.

148. Bassiouny, E. Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings / E. Bassiouny, H. M. Youssef // J. Thermoelasticity. – 2013. – Vol. 1, no. 1. – Pp. 4-12.

149. Bednarek, S. Elastic and magnetic properties of heat-shrinkable ferromagnetic composites with elastomer matrix / S. Bednarek // Mater. Sci. Engrg. B. – 2000. – no. 77. – Pp.120-127.

150. Benaissa, H. Existence results for unilateral contact problem with friction of thermo-electro-elasticity / H. Benaissa, E. H. Essoufi, R. Fakhar // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. – 2015. – no. 36. – Pp. 911-926.

151. Cady, W. G. Piezoelectricity. New York / W. G. Cady. – McGraw-Hill, 1946; русский перевод: Кэди, У. Пьезоэлектричество и его практические применения / У. Кэди ; пер. с англ. Б. Н. Достовалова и В. П. Константиновой ; под ред. А. В. Шубникова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 719 с.

152. Chen, C.-Q. Piezothermoelasticity analysis for a circular cylindrical shell under the state of axisymmetric deformation / C.-Q. Chen, Y.-P. Shen // International Journal of Engineering Science. – 1996. – vol. 34, no. 14. – Pp. 1585–1600.

153. Chen, W. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell / W. Chen, T. Shioya // Journal of Thermal Stresses. – 2001. – no. 24(2). – Pp. 105-120. DOI:10.1080/01495730150500424.

154. Choudhary, R. Investigation of the electromechanical coupling nonlinearity in piezoelectric energy harvester / R. Choudhary, I. Rzig, E. R. Fotsing, A. Ross // 2024.

155. Clough, R.W. The Finite Element Methods in Plane Stress Analysis / R.W. Clough // Proceedings of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation. – Pittsburg, 1960.

156. Cooke, J. A solution of Tranter's dual integral equations problem / J. Cooke // *Quart. J. Mech. a. Appl. Math.*, 1956. – vol. 9, no. 1. – Pp. 103 - 109.
157. Costa Branco, P. J. Smart Mater / P. J. Costa Branco, A. Dente // *Struct.* – 2004. – Vol.13. – 631 Pp. – DOI:10.1088/0964-1726/13/4/001.
158. Courant, R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations / R. Courant // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1943. – Vol. 49. – Pp. 1 - 23.
159. Crandall, S. H. Engineering Analysis / S. H. Crandall. – McGraw-Hill, New York, 1956.
160. Du, J. K. Thickness vibrations of a piezoelectric plate under biasing fields / J. K. Du, J. Wang, Y. Y. Zhou // *Ultrasonics*. – 2006. – Vol. 44, no. Suppl. – DOI: 10.1016/j.ultras.2006.05.183.
161. Duhamel, C. Memoire sur les equations generales de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilite n'est pas la mkme dans tous les sens / C. Duhamel // *J. de l'Ecole Polytechnique*. – 1832. – Vol. 13. – Pp.356-399.
162. Felipa, C. Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures / C. Felipa. – Univ. of California, Berkeley, str. Eng. Lab., Rep. SESM 66-22. –1966. – P.212.
163. Fox, F. E. Advanced ultrasonic source: optical investigation of ultrasonic waves in liquids / F. E. Fox, G. D. Rock // *Rev. Sci. Instr.* –1938. – Vol. 9. Pp. 341-345.
164. Giorgi, C. Constitutive equations and wave propagation in Green–Naghdi type II and III thermoelectroelasticity / C. Giorgi, A. Montanaro // *Journal of Thermal Stresses*. – 2016. – Vol. 39, no. 9. – Pp. 1051-1073. DOI: 10.1080/01495739.2016.1192848.
165. Görnandt, A. Finite element analysis of thermopiezoelectric smart structures / A. Görnandt, U. Gabbert // *Acta Mechanica*. – 2002. – Vol. 154. – Pp.129 - 140. – DOI: org/10.1007/BF01170703.
166. Gray, R. B. Пат. США № 2486560, November 1, 1949.
167. Green, A. E., Thermoelasticity without energy dissipation / A. E. Green, P. M. Naghdi // *Journal of Elasticity*. – 1993. – Vol. 61. – Pp. 189-208.

168. Gupta, V. Impact of memory-dependent heat transfer on Rayleigh waves propagation in nonlocal piezo-thermo-elastic medium with voids / V. Gupta, S. Das // *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. – 2024. – Vol. 34, no. 4. – Pp. 1903-1927. – DOI: 10.1108/HFF-10-2023-0615.
169. Hehlgers, F. W. About Piezoquartz plates as generators and receivers of high-frequency sound waves / F. W. Hehlgers. – *Ann. D. Phys* // 1928. – Vol. 86. – Pp. 587-627.
170. Heierle, J. Frequency stability of ultrashortwave transmitters stabilized with tourmaline / J. Heierle // *Helv. Phys. Acta*. – 1937. – Vol. 10. – Pp. 345-346.
171. Huang, D. J. Micromechanics determinations of thermoelectroelastic fields and effective thermoelectroelastic moduli of piezoelectric composites / D. J. Huang // *Mater. Sci. Engrg. B*. – 1996. – Vol. 39. – Pp. 163-172.
172. Huang, D. J. Piezoelectricity solutions for functionally graded piezoelectric beams / D. J. Huang, H. J. Ding, W. Q. Chen // *Smart Materials and Structures*. – 2007. – Vol. 16, no. 3. – Pp. 687-695.
173. Hubbard, J. C. Ultrasound (review) / J. C. Hubbard // *Amer. Journ. Phys.* – 1940. – Vol. 8. – Pp. 207-221.
174. Ishihara, M. Thermoelectroelastic response of a piezoelectric cylinder with symmetry under axisymmetric mechanical and thermal loading / M. Ishihara, Y. Ootao, Y. Kameo and T. Saito // *Mechanical Engineering Journal*. – 2017. – Vol. 4, no. 5. – Pp. 1-13. – DOI:10.1299/mej.16-00609.
175. Jam, J. E. An exact solution of mechanical buckling for functionally graded material bimorph circular plates / J.E. Jam, M. Khosravi, N. Namdaran // *Metall. Mater. Eng.* – 2013. – Vol. 19, no.1. – Pp. 45-63.
176. Jeffreys, H. The thermodynamic of an elastic solid / H. Jeffreys. – *Proc. Cambr. Phil. Soc.* – 1930. – Vol. 26., Issue 1 – Pp. 101-106.
177. Jurenas, V. Piezoelectric bimorphs for laser shutter systems: optimization of dynamic characteristics / V. Jurenas, R. Bansevicius, S. Navickaite // *Mechanika. Kaunas*. – 2010. – No. 5(85). – Pp. 44-47.

178. Kapuria, S. A coupled consistent thirdorder theory for hybrid piezoelectric plates / S. Kapuria, G. G. S. Achary // *Composite Structures*. – 2005. – Vol. 70, no. 1. – Pp. 120-133.
179. Lamé, G., *Leçons sur la Théorie analytique de la Chaleur* / G. Lamé. – Paris: Mallet Bachelier, 1897. – 414 p.
180. Lee, H. J. The Effect of Temperature Dependent Material Properties on the Response of Piezoelectric Composite Materials / H. J. Lee, D. A. Saravanos // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. –1998.– Vol.9, no. 7. – Pp. 503-508. – DOI:10.1177/1045389X9800900702.
181. Levin, V. Exact relations between the effective thermoelectroelastic characteristics of piezoelectric composites// *Int. J. Engrg. Sci.* – 2013. – Vol. 66, no. 67. – Pp. 14-20.
182. Lord, H. A generalized dynamical theory of thermoelasticity /H. Lord // *J. Elasticity*. –1967. – Vol.15, no. 5. – Pp. 299–309.
183. Lord, W. A generalized dynamical theory of thermoelasticity / W. Lord, Y. Shulman// *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1967. – Vol. 15, Issue 5. – Pp. –299-309. – DOI:10.1016/0022-5096(67)90024-5.
184. Mahmoud, W. One-dimensional problem of nonlinear thermoelectroelasticity with thermal relaxation / W. Mahmoud, M.S. Abu-Dinah, A. R. El - Dhaba, A. F. Ghaleb, E. K. Ravi // *Advanced Structured Materials*. – 2018. – Vol. 89. Springer, Cham. – DOI:10.1007/978-3-319-72440-9_26.
185. Melosh, R. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method / R. J. Melosh, Robert // *AIAA Journal*. – 1963. – Vol.1. – Pp. 1631-1637.
186. Mindlin, R. D. Equation of high frequency vibration of thermopiezoelectric crystal plates / R. D. Mindlin // *Int. J. Sol. Struct.* – 1974. – Vol. 10, no. 6. – Pp. 625-637.
187. Nadai, A. *Elastische Platten* / A. Nadai // Verlag von Lilhelm Ernst und Sohn, Berlin. – 1944. – 100 p.
188. Neumann, F. E. *Ueber die Theorie d. Elasticität* / F. E. Neumann. – J. Leipzig. –1885. – 104 p.

189. Nowacki, W. Problem of linear coupled magnetothermoelasticity: I Energetic theorem and uniqueness theorem of solutions / W. Nowacki // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn. – 1965. – Vol.13, no. 4. – Pp. 377 - 382.
190. Nowacki, W. Thermoelastic distortion problems / W. Nowacki // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser., sci. techn. – 1966. – Vol.14, no. 3. – Pp. 420 - 482.
191. Nowacki, W. Green's functions for a thermoelastic medium (quasi-static problem) / W. Nowacki // Bull. Inst. politehn. last. – 1966. – Vol. 12, no. 3. – Pp. 83 - 92.
192. Nowacki, W. On the completeness of stress functions in thermoelasticity/ W. Nowacki // Bull. Acad. Polon. Sci. – Ser. sci. techn. – 1967. – Vol.15, no. 9. – Pp. 785 - 793.
193. Nowacki, W. Thermoelastic wave-motions in an infinite body / W. Nowacki // Proc. Vibrat. Probl. Polish. Acad. – Ser. sci. techn. – 1968. – Vol. 9, no. 3. – Pp. 207 - 220.
194. Nowacki, W. Some general theorems of thermopiezoelectricity / W. Nowacki // J. Therm. Stress. – 1978. – Vol. 1. – Pp. 171-182.
195. Obata, Y. Steady thermal stress in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient materials / Y. Obata, N. Noda // J Therm Stress. – 1994. – Vol. 14. – Pp. 471 - 487.
196. Ootao, Y. Three-dimensional transient piezothermoelasticity in functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate / Y. Ootao, Y. Tanigawa // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – Vol. 37, no. 32. – Pp. 4377-4401.
197. Ootao, Y. Transient piezothermoelastic analysis for a functionally graded thermopiezoelectric hollow sphere / Y. Ootao, Y. Tanigawa // Composite Structures. – 2007. – Vol. 81, no. 4. – Pp. 540 - 549.
198. Peng-Fei, H. The transient responses of magneto–electro–elastic hollow cylinders/ H. PengFei Hou, A. Y. T. Leung // Smart Mater. Struct. – 2004. – Vol. 13. – Pp. 762-776.
199. PintoCarreia, F. Analysis of piezo-laminated axisymmetric shell: a semi analytical higher order model / F. PintoCarreia, C. M. MotaSoares, C. A. MotaSoares //

Computational Methods For Shell and Spatial Structures. – IASS-IACM. – 2000. – Pp. 1-19.

200. Pisano, R. La théorie analytique de la chaleur / R. Pisano, D. Capecchi // Notes on Fourier et Lamé. Bulletin de la Sabix. – 2009. – Pp.87-93.

201. Podil'chuk, Y. N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems / Y.N. Podil'chuk // International Applied Mechanics. – 2003. – 39. – Pp. 132-170. – DOI: 10.1023/A:1023953313612.

202. Qin, H. Q. Greens function for thermopiezoelectric plates with holes of various shapes / H. Q. Qin // Arch. Appl. Mech. – 1999. – Vol. 69. – Pp. 406-418.

203. Roberts, S. Phys. Rev / S. Roberts, 1947. – Vol. 71. – Pp. 890-895.

204. Rao, S. S. Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures / S.S. Rao, M. Sunar // AIAA Journal. – 1993. – Vol. 31. Pp. 1280-1286.

205. Roy, T. Improved shell finite element for piezothermoelastic analysis of smart fiber reinforced composite structures / T. Roy, P. Manikandan, D. Chakraborty // Finite Elements in Analysis and Design. – 2010. – Vol. 87, no. 12. – Pp. 714–720.

206. Saadatfar, M. Stress in piezoelectric hollow sphere with thermal gradient / M. Saadatfar, A. Rastgoo // J MechSciTechnol. – 2008. – Vol. 22, no.8. – Pp. 1460 - 1467. – DOI:10.1007/s12206-008-0423-8.

207. Shlyakhin, D. A. Non-stationary Flexural Fluctuations of a Round Flat Bimorph Plate with Graded-varying Thickness / D. A. Shlyakhin, O. V. Kazakova // XXIII R-S-P Seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering (23RSP) (TFoCE 2014), Dhaka, 20 June 2014. – Dhaka: Elsevier Ltd, 2014. – Pp. 69-74. – DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.014.

208. Shao, Z. S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z. S. Shao // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82, no. 3. – Pp. 155-163.

209. Taya, M. Design of bimorph piezo-composite actuators with functionally graded microstructure / M. Taya, A. A. Almajid, M. Dunn, H. Takahashi // *Sensors and Actuators A*. – 2003. – Vol. 107, no. 3. – Pp. 248–260.
210. Tranter, C. On some dual integral equations / C. Tranter // *Quart. J. Math.*, 1951. – Vol. 2, no. 5. – Pp. 60-68.
211. Vo, T. T. Evaluation of Electromechanical Coupling Factor for Piezoelectric Materials Using Finite Element Modeling / Vo Thanh Tung, Nguyen Trong Tinh, Nguyen Hoang Yen, Dang Anh Tuan // *International Journal of Materials and Chemistry*. – 2013. – Vol. 3, no. 3. – Pp. 59–63.
212. Voigt, W. Ueber die Elasticitätsverhältnisse cylindrisch aufgebauter Körper / W. Voigt // *Nachrichten. v. d. Königl. Gesellsch. der Wissenschaft und der Georg-Augustin Universität zu Göttingen*. – 1886. – Vol. 6. – Pp. 505-514.
213. Voigt, W. *Lehrbuch der Kristall-physik* / W. Voigt. – Teubner, 1910.
214. Von Hippel A., Breckenridge R. G., De Bretteville A. P., Jr., Brownlow J. M., Cresley F. G., Oster G., Tisza L., Westphal W. B. NDRC Rep. № 300, August 1944.
215. Von Hippel A., Breckenridge R. G., De Bretteville A. P., Jr., Brownlow J. M. NDRC Rep. № 540, October 1945.
216. Wainer, E. Пат. США №2402515 / E. Wainer. – June 18, 1946.
217. Wainer, E. Пат. США №2467169/ E. Wainer. – April 12, 1949.
218. Wang, X. D. The electromechanical behavior of a piezoelectric actuator bonded to an anisotropic elastic medium / X. D. Wang, G. L. Huang // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38, no. I., 26-27. – Pp. 4721-4740.
219. Wang, Q. Wave propagation in a piezoelectric coupled solid medium / Q. Wang // *ASME. J. Appl. Mech.* – 2002. – Vol. 69, no. 6. – Pp.819-824.
220. Wu, X.-H. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensors or actuators / X.-H. Wu, Y.-P. Shen, C. Chen // *Materials Letters*. – 2003. – vol. 57, no. 22-23. – Pp. 3532 - 3542.
221. Yang, J. Thermo-electro-mechanical characteristics of functionally graded piezoelectric actuators / J. Yang, H. J. Xiang// *Smart Materials and Structures*. – 2007. – Vol. 16, no. 3. – Pp. 784-797.

222. Ying, J. Axisymmetric thermoelastic analysis in a finite hollow cylinder due to nonuniform thermal shock / J. Ying, H. M. Wang // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2010. – Vol. 87, no. 12. – Pp. 714-720.

223. Zhong, X. An extended dielectric crack model for fracture analysis of a thermopiezoelectric strip / X. Zhong, Y. Wu, K. Zhang // Acta Mech. Solida Sin. – 2020. – Vol. 33. – Pp. 521-545.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Акты внедрения результатов диссертационной работы



ООО «СМР-ПРОЕКТ»
443086 г. Самара, ул. Мичурина, 132-11
ОГРН 1216300055586 ИНН/КПП 6316275468/631601001
Р/с 40702810854400023236 в ПАО Сбербанк
тел. 8 (927) 723-21-20, e-mail: smr-proekt@list.ru

Акт

внедрения результатов диссертационной работы
«Исследование связанных нестационарных термоэлектродупругих полей
в сплошных круглых пластинах»,
представленной на соискание учёной степени
кандидата технических наук
Савиновой Елены Владимировны

Настоящим актом ООО «СМР-Проект» подтверждает, что научные и практические результаты диссертационной работы Савиновой Е.В. на тему «Исследование связанных нестационарных термоэлектродупругих полей в сплошных круглых пластинах», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук и посвящённой исследованию нестационарных процессов в круглых пластинах в результате воздействия температурной нагрузки с целью оценки взаимного влияния термоэлектродупругих полей, внедрены в производственный процесс предприятия.

Использование результатов диссертационной работы Савиновой Е.В. позволило предприятию ООО «СМР-Проект» значительно улучшить характеристики разрабатываемых датчиков температуры со встроенными пьезокерамическими пластинами, что привело к повышению эффективности и надёжности работы устройств и стало явным преимуществом по сравнению с ранее разрабатываемыми моделями. Этот факт оказал положительное влияние на экономические показатели предприятия в связи с сокращением времени, затрачиваемого на исследования, разработку конструкторской документации и созданию опытных образцов.

Генеральный директор _____

Долгова

С. Н. Долгова





Акт. №158.06. от 03.06.2024

Общество с ограниченной ответственностью «Слэнакс»

ИНН 6312166757, КПП 631601001, ОГРН 1166313149496

р/с 40702810854400021348 Поволжский банк ПАО СБЕРБАНК, БИК 043601607

443124, г. Самара ул. Солнечная 20, офис 305

Т. 8 (846) 222-222-1, www.slenax.ru, info@slenax.ru**Акт**

**о внедрении (использовании) результатов диссертационной работы
Савиновой Елены Владимировны
«Исследование связанных нестационарных термоэлектродупругих
полей в сплошных круглых пластинах»**

Общество с ограниченной ответственностью «СЛЭНАКС» разрабатывает и производит стационарные и подвижные энергетические установки, оборудованные электрическими генераторами с приводом от дизельного двигателя внутреннего сгорания.

Настоящим актом подтверждается, что на производстве дизель-генераторных установок в период с 22.01.2024 г. по 17.05.2024 г. были выпущены опытные модели мощностью от 80 до 200 кВт, на которых применены разработанные научные и практические результаты диссертационной работы Савиновой Е. В. на тему «Исследование связанных нестационарных термоэлектродупругих полей в сплошных круглых пластинах» и проведены серии тестовых испытаний под нагрузкой.

Результаты исследования Савиновой Е. В. использованы для корректировки температурной нагрузки, действующей на круглые многослойные пластины с пьезокерамическим слоем преобразователей систем автоматического контроля и управления, для регулировки величины электрического импульса и повышения их чувствительности.

От внедрения научных результатов исследования получен положительный эффект, связанный со снижением времени аварийного отключения агрегатов дизель-генераторной установки, что подтверждает эффективность разработанных методик Савиновой Е. В. и повышает уровень безопасности дизель-генераторной установки при эксплуатации.

Технический директор
ООО «СЛЭНАКС»



Соколов Е. В.



ООО «ЭНЕРГОРЕСУРС»

E-mail: info@energy-res.ru

Сайт: energy-res.ru

Тел: +7 (846) 930-77-77

Акт

о внедрении (использовании) результатов диссертационной работы
«Исследование связанных нестационарных термоэлектроупругих полей
в сплошных круглых пластинах»

Комиссия в составе: председатель Мухин А. А., члены комиссии:

Лыков Н.В. и Тарасов А. А. составили настоящий акт о том, что в период с 24.02.2025 г. по 30.04.2025 г. ООО «Энергоресурс» были рассмотрены результаты исследования Савиновой Е.В. и проведены испытания опытных образцов температурных преобразователей со встроенными пьезокерамическими элементами по определению величин электрического потенциала и оценки напряжённо-деформируемого состояния в результате действия температурной нагрузки с использованием автоматизированного расчёта, разработанного в диссертационной работе Савиновой Елены Владимировны.

Тестовые сравнения результатов, полученных в ходе испытаний, связанных с определением перемещений и величин фиксируемого электрического потенциала на поверхности пьезокерамических элементов, а также комбинация вводимых при проведении испытаний параметров, а именно температура, размеры и материал элементов, показали высокую сходимость результатов расчётного комплекса с результатами, получаемых в ходе испытаний. Погрешность составила порядка 8 %. Разработанный программный расчёт представляет интерес для технологического цикла ООО «Энергоресурс».

Работа выполнена в порядке инициативы.

Председатель комиссии:
Генеральный директор Мухин А. А.

Заместитель директора
по производству: Лыков Н. В.

Старший лаборант: Тарасов А. А.





МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный
технический университет»
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)
Академия строительства и архитектуры
(АСА СамГТУ)

ул. Молодогвардейская, 244,
гл. корпус, г. Самара, 443100
Тел.: (846) 278-43-11, факс (846) 278-44-00
E-mail: rector@samgtu.ru
[ОКПО02068396](https://oipr.ru/objects/2068396), [ОГРН1026301167683](https://ogrn.ru/objects/1026301167683),
[ИНН 6315800040](https://inn.ru/objects/6315800040), КПП 631601001

№ _____
На № _____ от _____

АКТ

внедрения результатов диссертационной работы старшего преподавателя
кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и
фундаменты» АСА СамГТУ
Савиновой Е.В.

Материалы диссертационной работы Савиновой Е.В. «Исследование связанных нестационарных термоэлектродупругих полей в сплошных круглых пластинах» используются в учебном процессе при подготовке магистров по направлению подготовки 08.04.01 «Строительство» профиля «Теория сооружений» Самарского государственного технического университета и при изучении дисциплины «Взаимодействие упругих элементов конструкций с сопряжёнными полями гидроупругости, термоупругости, электроупругости».

Директор АСА СамГТУ

к.т.н., доцент

Декан ФПГС

к.т.н., доцент

Зав. каф.СМИП

д.т.н., профессор



М. В. Шувалов

А.А. Пищулев

Д. А. Шляхин

Акт
 об использовании результатов диссертационной работы
 «Исследование связанных нестационарных термоэлектроупругих полей
 в сплошных круглых пластинах»,
 представленной на соискание учёной степени кандидата технических наук
 Савиновой Елены Владимировны

Настоящий акт составлен о том, что научные и практические результаты диссертационной работы Савиновой Е. В. на тему «Исследование связанных нестационарных термоэлектроупругих полей в сплошных круглых пластинах», представленной на соискание учёной степени кандидата технических наук по специальности 1.1.8. «Механика деформируемого твёрдого тела» и посвящённой определению напряженно-деформируемого состояния исследуемых элементов, используются в производственной деятельности ООО «Волжский научно-исследовательский и проектный институт топливно-энергетического комплекса (Волга НИПИТЭК)» в рамках внутреннего технического обучения специалистов по направлению проектирования систем контрольно-измерительных приборов и автоматики.

Генеральный директор
 ООО «Волга НИПИТЭК»,
 К. Т. Н.



Лесухин М.С.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Программа по определению собственных значений в динамической осесимметричной задаче электроупругости

Mathcad-15.0

Исходные данные

материала пьезокерамика PZT-4

 $bb := 14 \cdot 10^{-3}$ - радиус пластины (м) $hh := 1.5 \cdot 10^{-3}$ - толщина пьезокерамической пластины (м)**Физико-механические характеристики пьезокерамики PZT-4****Модули упругости, Па** $C11 := 139000000000$ $C55 := 25600000000$ $C13 := 74300000000$ $C33 := 115000000000$ $C12 := 77800000000$ **Коэффициенты диэлектрической проницаемости, Ф/м** $\epsilon_{r33} := 0.00000000562$ $\epsilon_{r11} := 0.00000000646$ **Пьезомодули, Кл/м²** $e_{15} := 12.7$ $e_{31} := -5.2$ $e_{33} := 15.1$ **Плотность, кг/м³** $\rho := 7500$ **Коэффициент линейного температурного расширения, К⁻¹** $\alpha_t := 0.4 \cdot 10^{-5}$ **Компоненты тензора температурных напряжений, Н/(м²*С)** $\gamma_{11} := \alpha_t \cdot C11 \quad \gamma_{11} = 5.56 \times 10^5$ $\gamma_{33} := \alpha_t \cdot C33 \quad \gamma_{33} = 4.6 \times 10^5$ **Компоненты тензора пироккоэффициентов, Кл/(м²*С)** $g_{33} := -0.6 \cdot 10^{-4}$ $g_{11} := -0.6 \cdot 10^{-4}$

Mathcad-15.0

Компоненты тензора пироккоэффициентов, Кл/(м²*С)

$$g_{33} := -0.6 \cdot 10^{-4}$$

$$g_{11} := -0.6 \cdot 10^{-4}$$

Коэффициент теплопроводности, Вт/(м*С)

$$\Lambda := 1.6$$

Коэффициент объемной теплоемкости, Дж/(м³*С)

$$k := 3 \cdot 10^6$$

Исходные данные в безразмерной форме

$$h := \frac{hh}{bb} \quad - \text{толщина пьезопластины} \quad h = 0.107$$

Собственные значения по радиальной координате

$$jj_1 := 3.831706 \quad jj_2 := 7.015587 \quad jj_3 := 10.17347$$

$$jj_4 := 13.323692 \quad jj_5 := 16.471 \quad jj_6 := 19.6158$$

$$a_1 := \frac{C_{55}}{C_{11}} \quad a_2 := \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} \quad a_3 := \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}} \quad a_4 := \frac{C_{33}}{C_{11}}$$

$$a_5 := \frac{e_{15}}{e_{31}} \quad a_6 := \frac{e_{33}}{e_{31}} \quad a_7 := \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}} \quad a_8 := \frac{ep_{33}}{ep_{11}} \quad a_9 := \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11} \cdot ep_{11}}$$

$$a_{10} := \frac{e_{15} \cdot e_{31}}{C_{11} \cdot ep_{11}} \quad a_{11} := a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}} \quad a_{12} := \frac{g_{11} \cdot e_{31}}{\gamma_{11} \cdot ep_{11}} \quad a_{13} := \frac{g_{33} \cdot e_{31}}{\gamma_{11} \cdot ep_{11}}$$

$$a_{17} := \frac{C_{13}}{C_{11}}$$

$$jj := jj_1$$

$$R_1(\lambda) := a_9 \cdot \lambda^2 + (a_2 \cdot a_{10} - a_1 \cdot a_9) \cdot jj^2 \quad R_2 := a_4 \cdot a_9 - a_2 \cdot a_{11} \quad R_3 := -(a_5 \cdot a_9 + a_2) \cdot jj^2$$

$$R_4 := a_6 \cdot a_9 + a_2 \cdot a_8 \quad R_5(\lambda) := a_{10} \cdot jj^2 \cdot (jj^2 - \lambda^2)$$

$$R_6(\lambda) := a_{11}(\lambda^2 - jj^2) + \frac{a_9}{a_2} \cdot (a_1 \cdot \lambda^2 + a_2^2 \cdot jj^2 - a_1^2 \cdot jj^2) \quad R_7 := \frac{a_1 \cdot a_4 \cdot a_9}{a_2}$$

$$R_8(\lambda) := jj^2 \cdot (\lambda^2 - jj^2)$$

$$R_9(\lambda) := \frac{a_9}{a_2} \cdot (a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_5) \cdot jj^2 - a_8 \cdot (\lambda^2 - jj^2) \quad R_{10} := \frac{a_1 \cdot a_6 \cdot a_9}{a_2}$$

$$b_1(\lambda) := R_2 \cdot R_{10} - R_4 \cdot R_7 \quad b_2(\lambda) := R_1(\lambda) \cdot R_{10} + R_2 \cdot R_9(\lambda) - R_3 \cdot R_7 - R_4 \cdot R_6(\lambda)$$

$$b_3(\lambda) := R_1(\lambda) \cdot R_9(\lambda) + R_2 \cdot R_8(\lambda) - R_3 \cdot R_6(\lambda) - R_4 \cdot R_5(\lambda) \quad b_4(\lambda) := R_1(\lambda) \cdot R_8(\lambda) - R_3 \cdot R_5(\lambda)$$

Mathcad-15.0

$$k1(\lambda) := \frac{b2(\lambda)}{b1(\lambda)} \quad k2(\lambda) := \frac{b3(\lambda)}{b1(\lambda)} \quad k3(\lambda) := \frac{b4(\lambda)}{b1(\lambda)} \quad p(\lambda) := \frac{-k1(\lambda)^2}{3} + k2(\lambda)$$

$$qq(\lambda) := 2 \cdot \left(\frac{k1(\lambda)}{3} \right)^3 - \frac{k1(\lambda) \cdot k2(\lambda)}{3} + k3(\lambda) \quad Q(\lambda) := \left(\frac{p(\lambda)}{3} \right)^3 + \left(\frac{qq(\lambda)}{2} \right)^2$$

$$AA(\lambda) := \left(\frac{-qq(\lambda)}{2} + \sqrt{Q(\lambda)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad BB(\lambda) := \frac{-p(\lambda)}{3 \cdot AA(\lambda)}$$

$$k4(\lambda) := AA(\lambda) + BB(\lambda) - \frac{k1(\lambda)}{3} \quad k4(2.2) = 18.814$$

$$b5(\lambda) := \frac{-b4(\lambda) - b3(\lambda) \cdot k4(\lambda)}{k4(\lambda)^2} \quad b6(\lambda) := \frac{-b4(\lambda)}{k4(\lambda)} \quad b10(\lambda) := \frac{-(R1(\lambda) + R2 \cdot k4(\lambda))}{R3 + R4 \cdot k4(\lambda)}$$

$$AA1(\lambda) := \frac{-b5(\lambda) + \sqrt{b5(\lambda)^2 - 4 \cdot b1(\lambda) \cdot \left(\frac{b5(\lambda)^2}{4 \cdot b1(\lambda)} - b6(\lambda) \right)}}{4 \cdot b1(\lambda)} \quad A1(\lambda) := \sqrt{AA1(\lambda)}$$

$$BB1(\lambda) := AA1(\lambda) + \frac{b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \quad B1(\lambda) := \sqrt{BB1(\lambda)}$$

$$K21(\lambda, z) := e^{\sqrt{k4(\lambda)} \cdot z} \quad K22(\lambda, z) := e^{-\sqrt{k4(\lambda)} \cdot z} \quad K23(\lambda, z) := e^{A1(\lambda) \cdot z} \cdot \sin(B1(\lambda) \cdot z)$$

$$K24(\lambda, z) := e^{-A1(\lambda) \cdot z} \cdot \sin(B1(\lambda) \cdot z)$$

$$K25(\lambda, z) := e^{A1(\lambda) \cdot z} \cdot \cos(B1(\lambda) \cdot z) \quad K26(\lambda, z) := e^{-A1(\lambda) \cdot z} \cdot \cos(B1(\lambda) \cdot z)$$

$$BN1(\lambda) := \frac{-\left[\left(R1(\lambda) + R2 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \right) \cdot \left(R3 + R4 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \right) + 4 \cdot R2 \cdot R4 \cdot (A1(\lambda) \cdot B1(\lambda))^2 \right]}{\left(R3 + R4 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \right)^2 + (R4 \cdot 2 \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda))^2}$$

$$BN2(\lambda) := \frac{-(2 \cdot R2 \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda) + R4 \cdot BN1(\lambda) - 2 \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda))}{R3 + R4 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)}}$$

$$BN4(\lambda) := \frac{-2 \cdot \left[R1(\lambda) \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda) \cdot R4 - R2 \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda) \cdot \left(R3 + R4 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \right) + A1(\lambda) \cdot B1(\lambda) \cdot R4 \cdot R2 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \right]}{(2 \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda) \cdot R4)^2 + \left(R3 + R4 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \right)^2}$$

$$BN3(\lambda) := \frac{\left[\left(R3 + R4 \cdot \frac{-b5(\lambda)}{2 \cdot b1(\lambda)} \right) \cdot BN4(\lambda) - 2 \cdot R2 \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda) \right]}{(2 \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda) \cdot R4)}$$

$$K31(\lambda, z) := b10(\lambda) \cdot e^{\sqrt{k4(\lambda)} \cdot z} \quad K32(\lambda, z) := b10(\lambda) \cdot e^{-\sqrt{k4(\lambda)} \cdot z}$$

$$K33(\lambda, z) := BN1(\lambda) \cdot e^{A1(\lambda) \cdot z} \cdot \sin(B1(\lambda) \cdot z) + BN2(\lambda) \cdot e^{A1(\lambda) \cdot z} \cdot \cos(B1(\lambda) \cdot z)$$

Mathcad-15.0

$$K34(\lambda, z) := BN1(\lambda) \cdot e^{-A1(\lambda) \cdot z} \cdot \sin(B1(\lambda) \cdot z) - BN2(\lambda) \cdot e^{-A1(\lambda) \cdot z} \cdot \cos(B1(\lambda) \cdot z)$$

$$K35(\lambda, z) := BN3(\lambda) \cdot e^{A1(\lambda) \cdot z} \cdot \cos(B1(\lambda) \cdot z) + BN4(\lambda) \cdot e^{A1(\lambda) \cdot z} \cdot \sin(B1(\lambda) \cdot z)$$

$$K36(\lambda, z) := BN3(\lambda) \cdot e^{-A1(\lambda) \cdot z} \cdot \cos(B1(\lambda) \cdot z) - BN4(\lambda) \cdot e^{-A1(\lambda) \cdot z} \cdot \sin(B1(\lambda) \cdot z)$$

$$K12(\lambda, z) := (\lambda^2 - j^2)^{-1} \left[\left(\frac{a1 \cdot \lambda^2 + a2^2 \cdot j^2 - a1^2 \cdot j^2}{a2 \cdot j} \right) + \frac{a1 \cdot a4}{a2 \cdot j} \cdot k4(\lambda) + \dots \right] \cdot \left(-\sqrt{k4(\lambda)} \cdot e^{-\sqrt{k4(\lambda)} \cdot z} \right)$$

$$+ \left(\frac{a2 \cdot a3 - a1 \cdot a5}{a2} \right) \cdot j \cdot b10(\lambda) + \frac{a1 \cdot a6}{a2 \cdot j} \cdot b10(\lambda) \cdot k4(\lambda)$$

$$K11(\lambda, z) := (\lambda^2 - j^2)^{-1} \left[\left(\frac{a1 \cdot \lambda^2 + a2^2 \cdot j^2 - a1^2 \cdot j^2}{a2 \cdot j} \right) + \frac{a1 \cdot a4}{a2 \cdot j} \cdot k4(\lambda) + \dots \right] \cdot \left(\sqrt{k4(\lambda)} \cdot e^{\sqrt{k4(\lambda)} \cdot z} \right)$$

$$+ \left(\frac{a2 \cdot a3 - a1 \cdot a5}{a2} \right) \cdot j \cdot b10(\lambda) + \frac{a1 \cdot a6}{a2 \cdot j} \cdot b10(\lambda) \cdot k4(\lambda)$$

$$K13(\lambda, z) := (\lambda^2 - j^2)^{-1} \left[\frac{a1 \cdot \lambda^2 + a2^2 \cdot j^2 - a1^2 \cdot j^2}{a2 \cdot j} \cdot \left(\sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \dots \right) \right]$$

$$+ \frac{a1 \cdot a4}{a2 \cdot j} \cdot \left(\sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \cdot A1(\lambda)^3 + \dots \right)$$

$$+ \frac{a2 \cdot a3 - a1 \cdot a5}{a2} \cdot j \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot BN2(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \dots \right)$$

$$+ \frac{a1 \cdot a6}{a2 \cdot j} \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda)^3 \cdot BN2(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \dots \right)$$

$$K14(\lambda, z) := (\lambda^2 - j^2)^{-1} \left[\frac{a1 \cdot \lambda^2 + a2^2 \cdot j^2 - a1^2 \cdot j^2}{a2 \cdot j} \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot B1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \right) \right]$$

$$+ \frac{a1 \cdot a4}{a2 \cdot j} \cdot \left(3 \cdot \cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \cdot A1(\lambda)^2 \cdot B1(\lambda) - \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \cdot A1(\lambda)^3 + \dots \right)$$

$$+ \frac{a2 \cdot a3 - a1 \cdot a5}{a2} \cdot j \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot BN2(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot BN1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \dots \right)$$

$$+ \frac{a1 \cdot a6}{a2 \cdot j} \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda)^3 \cdot BN2(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda)^3 \cdot BN1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot B1(\lambda)^3 \cdot BN1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \dots \right)$$

$$K15(\lambda, z) := (\lambda^2 - j^2)^{-1} \left[\frac{a1 \cdot \lambda^2 + a2^2 \cdot j^2 - a1^2 \cdot j^2}{a2 \cdot j} \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot B1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \right) \right]$$

$$+ \frac{a1 \cdot a4}{a2 \cdot j} \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \cdot A1(\lambda)^3 - 3 \cdot \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \cdot A1(\lambda)^2 \cdot B1(\lambda) - \dots \right)$$

$$+ \frac{a2 \cdot a3 - a1 \cdot a5}{a2} \cdot j \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot BN3(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot BN4(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \dots \right)$$

$$+ \frac{a1 \cdot a6}{a2 \cdot j} \cdot \left(\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda)^3 \cdot BN3(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda)^3 \cdot BN4(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot B1(\lambda)^3 \cdot BN4(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \dots \right)$$

Mathcad-15.0

$$K16(\lambda, z) := (\lambda^2 - j^2)^{-1} \left[\frac{a1 \cdot \lambda^2 + a2^2 \cdot j^2 - a1^2 \cdot j^2}{a2 \cdot j^2} \left(-\cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot B1(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \right) \dots \right. \\ \left. + \frac{a1 \cdot a4}{a2 \cdot j^2} \left(3 \cdot \cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} \cdot A1(\lambda) \cdot B1(\lambda)^2 - \dots \right) \dots \right. \\ \left. + \frac{a2 \cdot a3 - a1 \cdot a5}{a2} \cdot j^2 \left(\sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot BN4(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda) \cdot BN3(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \dots \right) \dots \right. \\ \left. + \frac{a1 \cdot a6}{a2 \cdot j^2} \left(\sin(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda)^3 \cdot BN4(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} - \cos(z \cdot B1(\lambda)) \cdot A1(\lambda)^3 \cdot BN3(\lambda) \cdot e^{-z \cdot A1(\lambda)} + \dots \right) \dots \right]$$

$$B11(\lambda, z) := a17 \cdot j^2 \cdot K11(\lambda, z) + a4 \cdot \frac{d}{dz} K21(\lambda, z) + a6 \cdot \frac{d}{dz} K31(\lambda, z)$$

$$B12(\lambda, z) := a17 \cdot j^2 \cdot K12(\lambda, z) + a4 \cdot \frac{d}{dz} K22(\lambda, z) + a6 \cdot \frac{d}{dz} K32(\lambda, z)$$

$$B13(\lambda, z) := a17 \cdot j^2 \cdot K13(\lambda, z) + a4 \cdot \frac{d}{dz} K23(\lambda, z) + a6 \cdot \frac{d}{dz} K33(\lambda, z)$$

$$B14(\lambda, z) := a17 \cdot j^2 \cdot K14(\lambda, z) + a4 \cdot \frac{d}{dz} K24(\lambda, z) + a6 \cdot \frac{d}{dz} K34(\lambda, z)$$

$$B16(\lambda, z) := a17 \cdot j^2 \cdot K16(\lambda, z) + a4 \cdot \frac{d}{dz} K26(\lambda, z) + a6 \cdot \frac{d}{dz} K36(\lambda, z)$$

$$B15(\lambda, z) := a17 \cdot j^2 \cdot K15(\lambda, z) + a4 \cdot \frac{d}{dz} K25(\lambda, z) + a6 \cdot \frac{d}{dz} K35(\lambda, z)$$

$$B21(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K11(\lambda, z) - j^2 \cdot K21(\lambda, z)$$

$$B22(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K12(\lambda, z) - j^2 \cdot K22(\lambda, z)$$

$$B23(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K13(\lambda, z) - j^2 \cdot K23(\lambda, z)$$

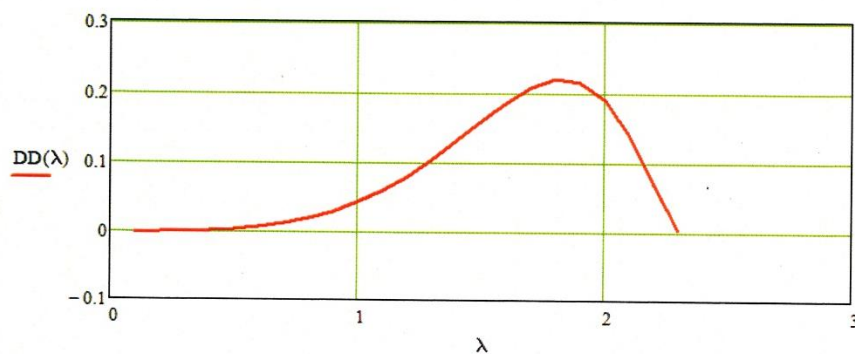
$$B24(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K14(\lambda, z) - j^2 \cdot K24(\lambda, z)$$

$$B25(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K15(\lambda, z) - j^2 \cdot K25(\lambda, z)$$

$$B26(\lambda, z) := \frac{d}{dz} K16(\lambda, z) - j^2 \cdot K26(\lambda, z)$$

$$DD(\lambda) := \begin{pmatrix} B11(\lambda, 0) & B12(\lambda, 0) & B13(\lambda, 0) & B14(\lambda, 0) & B15(\lambda, 0) & B16(\lambda, 0) \\ B11(\lambda, h) & B12(\lambda, h) & B13(\lambda, h) & B14(\lambda, h) & B15(\lambda, h) & B16(\lambda, h) \\ B21(\lambda, 0) & B22(\lambda, 0) & B23(\lambda, 0) & B24(\lambda, 0) & B25(\lambda, 0) & B26(\lambda, 0) \\ B21(\lambda, h) & B22(\lambda, h) & B23(\lambda, h) & B24(\lambda, h) & B25(\lambda, h) & B26(\lambda, h) \\ K31(\lambda, 0) & K32(\lambda, 0) & K33(\lambda, 0) & K34(\lambda, 0) & K35(\lambda, 0) & K36(\lambda, 0) \\ K31(\lambda, h) & K32(\lambda, h) & K33(\lambda, h) & K34(\lambda, h) & K35(\lambda, h) & K36(\lambda, h) \end{pmatrix}$$

$$\lambda := 0.1, 0.2 \dots 2.3$$



Mathcad-15.0

$$\lambda := 0.4098$$

$$DDD := \begin{pmatrix} B12(\lambda, 0) & B13(\lambda, 0) & B14(\lambda, 0) & B15(\lambda, 0) & B16(\lambda, 0) \\ B12(\lambda, h) & B13(\lambda, h) & B14(\lambda, h) & B15(\lambda, h) & B16(\lambda, h) \\ B22(\lambda, 0) & B23(\lambda, 0) & B24(\lambda, 0) & B25(\lambda, 0) & B26(\lambda, 0) \\ B22(\lambda, h) & B23(\lambda, h) & B24(\lambda, h) & B25(\lambda, h) & B26(\lambda, h) \\ K32(\lambda, 0) & K33(\lambda, 0) & K34(\lambda, 0) & K35(\lambda, 0) & K36(\lambda, 0) \end{pmatrix} \quad SSS := \begin{pmatrix} -B11(\lambda, 0) \\ -B11(\lambda, h) \\ -B21(\lambda, 0) \\ -B21(\lambda, h) \\ -K31(\lambda, 0) \end{pmatrix}$$

$$D2 := \text{Isolve}(DDD, SSS) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.635$$

$$D3 := \text{Isolve}(DDD, SSS) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.083$$

$$D4 := \text{Isolve}(DDD, SSS) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3.482$$

$$D5 := \text{Isolve}(DDD, SSS) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.069$$

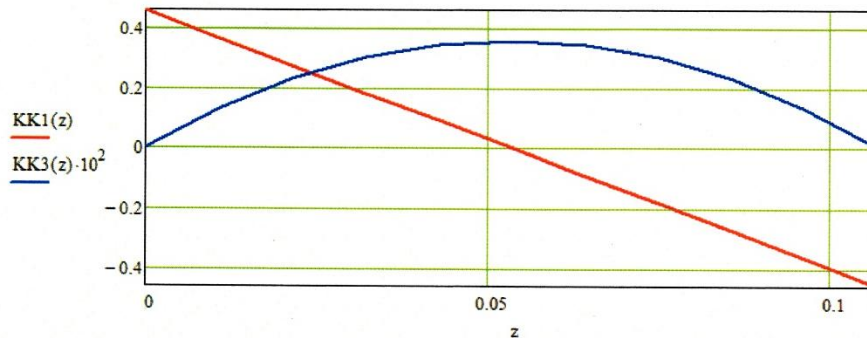
$$D6 := \text{Isolve}(DDD, SSS) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2.903$$

$$KK1(z) := K11(\lambda, z) + D2 \cdot K12(\lambda, z) + D3 \cdot K13(\lambda, z) + D4 \cdot K14(\lambda, z) + D5 \cdot K15(\lambda, z) + D6 \cdot K16(\lambda, z)$$

$$KK2(z) := K21(\lambda, z) + D2 \cdot K22(\lambda, z) + D3 \cdot K23(\lambda, z) + D4 \cdot K24(\lambda, z) + D5 \cdot K25(\lambda, z) + D6 \cdot K26(\lambda, z)$$

$$KK3(z) := K31(\lambda, z) + D2 \cdot K32(\lambda, z) + D3 \cdot K33(\lambda, z) + D4 \cdot K34(\lambda, z) + D5 \cdot K35(\lambda, z) + D6 \cdot K36(\lambda, z)$$

$$z := 0, \frac{h}{10} \dots h$$



ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Программа по определению компонент ядра биортогонального преобразования по аксиальной координате

Mathcad-15.0

Исходные данные

 $bb := 14 \cdot 10^{-3}$ - радиус пластины (м)

 $hh := 1.5 \cdot 10^{-3}$ - толщина пьезокерамической пластины (м)

Физико-механические характеристики пьезокерамики PZT-4

Модули упругости, Па

 $C11 := 139000000000$
 $C55 := 25600000000$
 $C13 := 74300000000$
 $C33 := 115000000000$
 $C12 := 77800000000$

Коэффициенты диэлектрической проницаемости, Ф/м

 $\epsilon_{p33} := 0.00000000562$
 $\epsilon_{p11} := 0.00000000646$

Пьезомодули, Кл/м2

 $e15 := 12.7$
 $e31 := -5.2$
 $e33 := 15.1$

Плотность, кг/м3

 $\rho := 7500$

Коэффициент линейного температурного расширения, K^{-1}

 $\alpha_t := 0.4 \cdot 10^{-5}$

Компоненты тензора температурных напряжений, Н/(м2*С)

 $\gamma_{11} := \alpha_t \cdot C11 \quad \gamma_{11} = 5.56 \times 10^5$
 $\gamma_{33} := \alpha_t \cdot C33 \quad \gamma_{33} = 4.6 \times 10^5$

Компоненты тензора пьезокоэффициентов, Кл/(м2*С)

 $g_{33} := -0.6 \cdot 10^{-4}$
 $g_{11} := -0.6 \cdot 10^{-4}$

Коэффициент теплопроводности, Вт/(м*С)

 $\Lambda := 1.6$

Коэффициент объемной теплоемкости, Дж/(м3*С)

 $k := 3 \cdot 10^6$

Первоначальная температура тела, $^{\circ}C$

 $T0 := 293$

Коэффициент теплоотдачи, Вт/м2*К

 $\alpha\alpha := 5.6$

Исходные данные в безразмерной форме

 $h := \frac{hh}{bb}$ - толщина пьезопластины

Собственные значения по радиальной координате

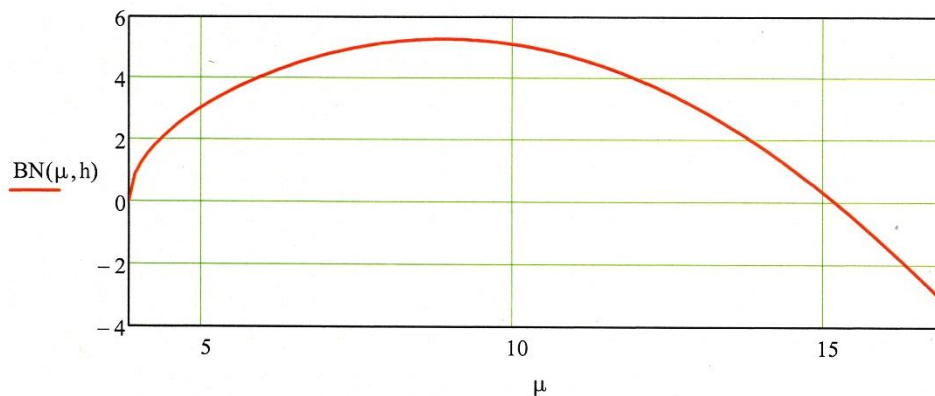
 $jj1 := 3.831706$
 $jj2 := 7.015587$
 $jj3 := 10.17347$
 $jj4 := 13.323692$
 $jj5 := 16.471$
 $jj6 := 19.6158$

Mathcad-15.0

$$\begin{aligned}
 a1 &:= \frac{C55}{C11} & a2 &:= \frac{C13 + C55}{C11} & a3 &:= \frac{e15 + e31}{e31} & a4 &:= \frac{C33}{C11} & a5 &:= \frac{e15}{e31} \\
 a6 &:= \frac{e33}{e31} & a7 &:= \frac{\gamma33}{\gamma11} & a8 &:= \frac{ep33}{ep11} & a9 &:= \frac{e31 \cdot (e15 + e31)}{C11 \cdot ep11} & a10 &:= \frac{e31 \cdot e15}{C11 \cdot ep11} \\
 a11 &:= \frac{e31 \cdot e33}{C11 \cdot ep11} & a12 &:= \frac{g11 \cdot e31}{\gamma11 \cdot ep11} & a13 &:= \frac{g33 \cdot e31}{\gamma11 \cdot ep11} & a14 &:= T0 \cdot \frac{\gamma11 \cdot \gamma33}{C11 \cdot k} \\
 a15 &:= T0 \cdot \frac{\gamma11 \cdot g33}{e31 \cdot k} & a16 &:= \frac{C13}{C11} & a17 &:= \alpha \alpha \cdot \frac{bb}{\Lambda}
 \end{aligned}$$

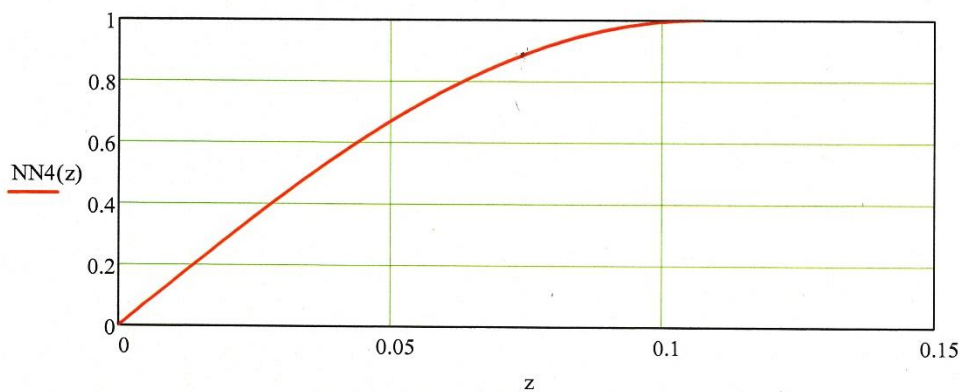
$$jj := jj1 \quad A3(\mu) := \sqrt{\mu^2 - jj^2} \quad N47(\mu, z) := \sin(A3(\mu) \cdot z)$$

$$BN(\mu, z) := \frac{d}{dz} N47(\mu, z) + a17 \cdot N47(\mu, z) \quad \mu := jj, jj + 0.1 \dots 17$$



$$\mu := 15.183 \quad A3(\mu) := \sqrt{\mu^2 - jj^2} \quad NN4(z) := \sin(A3(\mu) \cdot z)$$

$$z := 0, \frac{h}{100} \dots h$$



Mathcad-15.0

$$e0 := [a1 \cdot a4 \cdot (a2 \cdot a8 + a6 \cdot a9) - a1 \cdot a6 \cdot (a4 \cdot a9 - a2 \cdot a11)]^{-1}$$

$$k1 := e0 \cdot jj^2 \cdot \left[\begin{aligned} &(a2 \cdot a8 + a6 \cdot a9) \cdot (a2^2 - a1^2 - a4) - a1 \cdot a2 \cdot a4 + \dots \\ &+ a2 \cdot a3 \cdot a4 \cdot a9 + a4 \cdot a6 \cdot a9 - a1 \cdot a6 \cdot (a2 \cdot a10 - a1 \cdot a9) - a2 \cdot a11 \cdot (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3 + a6) \end{aligned} \right]$$

$$k2 := e0 \cdot jj^4 \cdot \left[\begin{aligned} &a1 \cdot (a2 \cdot a8 + a6 \cdot a9) - (a5 \cdot a9 + a2) \cdot (a2^2 - a1^2 - a4) - (a4 \cdot a9 - a2 \cdot a11) \cdot a5 + \dots \\ &+ (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3 + a6) \cdot (a2 \cdot a10 - a1 \cdot a9) \end{aligned} \right]$$

$$k3 := -e0 \cdot a2 \cdot jj^6 \cdot (a1 + a5 \cdot a10)$$

$$p := \frac{-k1^2}{3} + k2 \quad qq := 2 \cdot \left(\frac{k1}{3}\right)^3 - \frac{k1 \cdot k2}{3} + k3 \quad Q := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{qq}{2}\right)^2 \quad H := \frac{2}{qq} \cdot \sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}$$

$$\beta := \text{asin}(H) \quad HH := \left(\frac{\sin(0.5 \cdot \beta)}{\cos(0.5 \cdot \beta)}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \alpha := \text{atan}(HH)$$

$$B1 := -2 \cdot \sqrt{\frac{-p}{3}} \cdot (\sin(2 \cdot \alpha))^{-1} - \frac{k1}{3} \quad A1 := \sqrt{B1}$$

$$bb5 := \frac{-k3 - k2 \cdot B1}{B1^2} \quad bb6 := \frac{-k3}{B1}$$

$$AA := \frac{-2 \cdot bb5 + \sqrt{4 \cdot bb5^2 - 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{bb5^2}{4} - bb6\right)}}{8} \quad BB := AA + \frac{bb5}{2} \quad A2 := \sqrt{AA} \quad B2 := \sqrt{BB}$$

$$b1 := e0 \cdot a1 \cdot [a7 \cdot (a2 \cdot a8 + a6 \cdot a9) - a6 \cdot (a2 \cdot a13 + a7 \cdot a9)]$$

$$b2 := e0 \cdot [(a2 - a7) \cdot (a2 \cdot a8 + a6 \cdot a9) - a1 \cdot a7 \cdot (a5 \cdot a9 + a2) + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3 + a6) \cdot (a2 \cdot a13 + a7 \cdot a9)] \cdot jj^2$$

$$b3 := -e0 \cdot a2 \cdot [a5 \cdot (a9 + a13) + a2 - a7] \cdot jj^4$$

$$m0(\mu) := \frac{(b1 \cdot A3(\mu)^4 - b2 \cdot A3(\mu)^2 + b3) \cdot A3(\mu)}{-A3(\mu)^6 + k1 \cdot A3(\mu)^4 - k2 \cdot A3(\mu)^2 + k3}$$

$$N21(z) := e^{A1 \cdot z} \quad N22(z) := e^{-A1 \cdot z} \quad N23(z) := \exp(A2 \cdot z) \cdot \sin(B2 \cdot z)$$

$$N24(z) := \exp(-A2 \cdot z) \cdot \sin(B2 \cdot z) \quad N25(z) := \exp(A2 \cdot z) \cdot \cos(B2 \cdot z)$$

$$N26(z) := \exp(-A2 \cdot z) \cdot \cos(B2 \cdot z)$$

$$N2A(z) := m0(\mu) \cdot \cos(A3(\mu) \cdot z)$$

$$p0 := \frac{-(a4 \cdot a9 - a2 \cdot a11) \cdot A1^2 + (a2 \cdot a10 - a1 \cdot a9) \cdot jj^2}{(a2 \cdot a8 + a6 \cdot a9) \cdot A1^2 - (a5 \cdot a9 + a2) \cdot jj^2} \quad b4 := a4 \cdot a9 - a2 \cdot a11 \quad b5 := (a2 \cdot a10 - a1 \cdot a9) \cdot jj^2$$

Mathcad-15.0

$$b6 := a2 \cdot a8 + a6 \cdot a9$$

$$b7 := -(a5 \cdot a9 + a2) \cdot jj^2$$

$$p1 := \frac{-(b4 \cdot b6 \cdot 4 \cdot A2^2 \cdot B2^2) - [b4 \cdot (A2^2 - B2^2) + b5] \cdot (b6 \cdot A2^2 - b6 \cdot B2^2 + b7)}{b6^2 \cdot 4 \cdot A2^2 \cdot B2^2 + [b6 \cdot (A2^2 - B2^2) + b7] \cdot (b6 \cdot A2^2 - b6 \cdot B2^2 + b7)}$$

$$p2 := \frac{[b4 \cdot (A2^2 - B2^2) + b5]}{(b6 \cdot 2 \cdot A2 \cdot B2)} + \frac{[b6 \cdot (A2^2 - B2^2) + b7]}{(b6 \cdot 2 \cdot A2 \cdot B2)} \cdot p1$$

$$p3(\mu) := \frac{(b4 \cdot A3(\mu)^2 \cdot m0(\mu)) - b5 \cdot m0(\mu) + (a2 \cdot a13 + a7 \cdot a9) \cdot A3(\mu)}{(b7 - b6 \cdot A3(\mu)^2)}$$

$$N31(z) := p0 \cdot e^{A1 \cdot z}$$

$$N32(z) := p0 \cdot e^{-A1 \cdot z}$$

$$N33(z) := \exp(A2 \cdot z) \cdot (p1 \cdot \sin(B2 \cdot z) + p2 \cdot \cos(B2 \cdot z))$$

$$N34(z) := \exp(-A2 \cdot z) \cdot (p1 \cdot \sin(B2 \cdot z) - p2 \cdot \cos(B2 \cdot z))$$

$$N35(z) := \exp(A2 \cdot z) \cdot (p1 \cdot \cos(B2 \cdot z) - p2 \cdot \sin(B2 \cdot z))$$

$$N36(z) := \exp(-A2 \cdot z) \cdot (p1 \cdot \cos(B2 \cdot z) + p2 \cdot \sin(B2 \cdot z))$$

$$N3A(z) := p3(\mu) \cdot \cos(A3(\mu) \cdot z)$$

$$N11(z) := (a2 \cdot jj^3)^{-1} \cdot [-a1 \cdot a4 \cdot A1^2 + (a1^2 - a2^2) \cdot jj^2 - a1 \cdot a6 \cdot p0 \cdot A1^2 + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3) \cdot jj^2 \cdot p0] \cdot A1 \cdot e^{A1 \cdot z}$$

$$N12(z) := (a2 \cdot jj^3)^{-1} \cdot [-a1 \cdot a4 \cdot A1^2 + (a1^2 - a2^2) \cdot jj^2 - a1 \cdot a6 \cdot p0 \cdot A1^2 + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3) \cdot jj^2 \cdot p0] \cdot (-A1) \cdot e^{-A1 \cdot z}$$

$$N13(z) := (a2 \cdot jj^3)^{-1} \cdot \left[-a1 \cdot a4 \cdot \left[\begin{aligned} &(A2^3 - 3 \cdot A2 \cdot B2^2) \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot \sin(B2 \cdot z) + \dots \\ &+ (3 \cdot A2^2 \cdot B2 - B2^3) \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot \cos(B2 \cdot z) \end{aligned} \right] + \dots \right. \\ \left. + (a1^2 - a2^2) \cdot jj^2 \cdot \left[\begin{aligned} &(A2 \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot \sin(B2 \cdot z) + \dots) \\ &+ B2 \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot \cos(B2 \cdot z) \end{aligned} \right] - \dots \right. \\ \left. + a1 \cdot a6 \cdot \left[\begin{aligned} &A2^2 \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot \left[\begin{aligned} &\cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) + \dots \\ &+ \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) \end{aligned} \right] \dots \\ &+ \dots - e^{A2 \cdot z} \cdot \left[\begin{aligned} &B2^2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) \dots \\ &+ \dots + \left(\dots \right)^2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) \end{aligned} \right] + \dots \end{aligned} \right] + \dots \right. \\ \left. + 2 \cdot A2 \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot [B2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) - B2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1)] \right] \\ \left. + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3) \cdot jj^2 \cdot [e^{A2 \cdot z} \cdot [(B2 \cdot p1 + A2 \cdot p2) \cdot \cos(B2 \cdot z) + (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) \cdot \sin(B2 \cdot z)]] \right] \cdot *$$

$$N14(z) := (a2 \cdot jj^3)^{-1} \cdot \left[-a1 \cdot a4 \cdot \left[\begin{aligned} &(3 \cdot A2^2 \cdot B2 - B2^3) \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \cos(B2 \cdot z) + \dots \\ &+ (3 \cdot A2 \cdot B2^2 - A2^3) \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \sin(B2 \cdot z) \end{aligned} \right] + \dots \right. \\ \left. + (a1^2 - a2^2) \cdot jj^2 \cdot \left[\begin{aligned} &(B2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \cos(B2 \cdot z) - A2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \sin(B2 \cdot z)) - \dots \\ &+ A2^2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \left[\begin{aligned} &\cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) - \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) \end{aligned} \right] - \dots \\ &+ e^{-A2 \cdot z} \cdot \left[\begin{aligned} &B2^2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) - B2^2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) \end{aligned} \right] + \dots \\ &+ 2 \cdot A2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot [B2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) + B2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1)] \end{aligned} \right] + \dots \right. \\ \left. + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3) \cdot jj^2 \cdot [e^{-A2 \cdot z} \cdot [(B2 \cdot p1 + A2 \cdot p2) \cdot \cos(B2 \cdot z) + (B2 \cdot p2 - A2 \cdot p1) \cdot \sin(B2 \cdot z)]] \right] \cdot *$$

$$N15(z) := (a2 \cdot jj^3)^{-1} \cdot \left[-a1 \cdot a4 \cdot \left[\left(A2^3 - 3 \cdot A2 \cdot B2^2 \right) \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot \cos(B2 \cdot z) + \dots \right] + \left(a1^2 - a2^2 \right) \cdot jj^2 \cdot \left(A2 \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot \cos(B2 \cdot z) - \dots \right) - \dots \right. \\ \left. + a1 \cdot a6 \cdot \left[A2^2 \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot [\cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) - \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1)] \dots \right. \right. \\ \left. + \dots - e^{A2 \cdot z} \cdot [B2^2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) - B2^2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1)] - \dots \right. \\ \left. + 2 \cdot A2 \cdot e^{A2 \cdot z} \cdot [B2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) + B2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2)] \right. \\ \left. + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3) \cdot jj^2 \cdot [e^{A2 \cdot z} \cdot [(A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) \cdot \cos(B2 \cdot z) + [-(A2 \cdot p2) - B2 \cdot p1] \cdot \sin(B2 \cdot z)]] \right] + \dots$$

$$N16(z) := (a2 \cdot jj^3)^{-1} \cdot \left[-a1 \cdot a4 \cdot \left[\left(B2^3 - 3 \cdot A2^2 \cdot B2 \right) \cdot \sin(B2 \cdot z) + \dots \right] \cdot e^{-A2 \cdot z} + \dots \right. \\ \left. + \left(a1^2 - a2^2 \right) \cdot jj^2 \cdot \left(-A2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \cos(B2 \cdot z) - B2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \sin(B2 \cdot z) \right) - \dots \right. \\ \left. + a1 \cdot a6 \cdot \left[e^{-A2 \cdot z} \cdot \left[B2^2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) + \dots \right] - \dots \right. \right. \\ \left. + B2^2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) \right] + \dots \\ \left. + A2^2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \left[\cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) + \dots \right] + \dots \right. \\ \left. + \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) \right] + \dots \\ \left. + 2 \cdot A2 \cdot e^{-A2 \cdot z} \cdot \left[B2 \cdot \cos(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p2 + B2 \cdot p1) - \dots \right] \right. \\ \left. + B2 \cdot \sin(B2 \cdot z) \cdot (A2 \cdot p1 - B2 \cdot p2) \right] + \dots \\ \left. + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3) \cdot jj^2 \cdot [(B2 \cdot p2 - A2 \cdot p1) \cdot \cos(B2 \cdot z) - (B2 \cdot p1 + A2 \cdot p2) \cdot \sin(B2 \cdot z)] \cdot e^{-A2 \cdot z} \right] + \dots$$

$$N1A(z) := (a2 \cdot jj^3)^{-1} \cdot \left[-a1 \cdot a4 \cdot (\sin(z \cdot A3(\mu)) \cdot A3(\mu)^3 \cdot m0(\mu)) + \dots \right. \\ \left. + \left(a1^2 - a2^2 \right) \cdot jj^2 \cdot (-\sin(z \cdot A3(\mu)) \cdot A3(\mu) \cdot m0(\mu)) - a1 \cdot a6 \cdot (\sin(z \cdot A3(\mu)) \cdot A3(\mu)^3 \cdot p3(\mu)) + \dots \right. \\ \left. + (a1 \cdot a5 + a2 \cdot a3) \cdot jj^2 \cdot (-\sin(z \cdot A3(\mu)) \cdot A3(\mu) \cdot p3(\mu)) + a1 \cdot a7 \cdot (-\sin(z \cdot A3(\mu)) \cdot A3(\mu)^2) + \dots \right. \\ \left. + a2 \cdot jj^2 \cdot (\sin(A3(\mu) \cdot z)) \right] + \dots$$

$$B11(z) := \frac{d}{dz} N11(z) - jj \cdot N21(z)$$

$$B12(z) := \frac{d}{dz} N12(z) - jj \cdot N22(z)$$

$$B13(z) := \frac{d}{dz} N13(z) - jj \cdot N23(z)$$

$$B14(z) := \frac{d}{dz} N14(z) - jj \cdot N24(z)$$

$$B15(z) := \frac{d}{dz} N15(z) - jj \cdot N25(z)$$

$$B16(z) := \frac{d}{dz} N16(z) - jj \cdot N26(z)$$

$$B1A(z) := \frac{d}{dz} N1A(z) - jj \cdot N2A(z)$$

$$B21(z) := a16 \cdot jj \cdot N11(z) + a4 \cdot \left(\frac{d}{dz} N21(z) \right) + a6 \cdot \left(\frac{d}{dz} N31(z) \right)$$

$$B22(z) := a16 \cdot jj \cdot N12(z) + a4 \cdot \left(\frac{d}{dz} N22(z) \right) + a6 \cdot \left(\frac{d}{dz} N32(z) \right)$$

$$B23(z) := a16 \cdot jj \cdot N13(z) + a4 \cdot \left(\frac{d}{dz} N23(z) \right) + a6 \cdot \left(\frac{d}{dz} N33(z) \right)$$

Mathcad-15.0

$$NN1(z) := D1 \cdot N11(z) + D2 \cdot N12(z) + D3 \cdot N13(z) + D4 \cdot N14(z) + D5 \cdot N15(z) + D6 \cdot N16(z) + N1A(z)$$

$$NN2(z) := D1 \cdot N21(z) + D2 \cdot N22(z) + D3 \cdot N23(z) + D4 \cdot N24(z) + D5 \cdot N25(z) + D6 \cdot N26(z) + N2A(z)$$

$$NN3(z) := D1 \cdot N31(z) + D2 \cdot N32(z) + D3 \cdot N33(z) + D4 \cdot N34(z) + D5 \cdot N35(z) + D6 \cdot N36(z) + N3A(z)$$

$$z := 0, \frac{h}{100} \dots h$$

