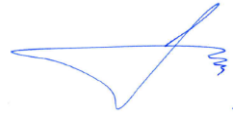


На правах рукописи



САВИНОВА Елена Владимировна

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИХ ПОЛЕЙ
В СПЛОШНЫХ КРУГЛЫХ
ПЛАСТИНАХ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Самара - 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет».

Научный руководитель:

Шляхин Дмитрий Аверкиевич, доктор технических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

Паньков Андрей Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций», ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»;

Овчинников Илья Игоревич, доктор технических наук, доцент, доцент кафедры «Транспортное строительство», ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.».

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк.

Защита состоится «3» октября 2025 г. в 12 часов 00 минут на заседании объединённого диссертационного совета 99.2.039.02 на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» и ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, главный корпус, аудитория 200.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет».

Отзывы на автореферат просим высылать в двух экземплярах, заверенных печатью, по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета 99.2.039.02.

Автореферат разослан «__» _____ 2025 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
к.т.н., доцент



А. Р. Луц

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В современном приборостроении широко применяют тепловые пьезокерамические устройства различного назначения. Их работа базируется на уникальном явлении взаимосвязанности температурных, электрических и упругих полей. В результате действия внешнего теплового фактора и возникновения неравномерных нестационарных деформаций на поверхности электроупругого элемента происходит генерация электрического заряда, значение которого позволяет определить величину температурного воздействия.

Для описания работы пьезокерамических преобразователей, в последнее время, получило развитие новое научное направление – термоэлектроупругость. Анализ динамических процессов в конструкциях с достаточной степенью точности удаётся осуществить только с помощью аналитических решений соответствующих задач. При этом сложность исследований заключается в том, что математическая формулировка данной теории включает связанные уравнения, которые содержат несамосопряжённый дифференциальный оператор. Проблемы при построении решений многократно возрастают при переходе от однослойных к многослойным элементам. В связи с этим в большинстве разработок используются упрощённые модели, что не позволяет в полной мере оценить взаимосвязь нестационарных полей различной физической природы.

В этой связи на сегодняшний день одной из ключевых задач современной механики деформируемого твёрдого тела является разработка эффективных методов нестационарного расчёта упругих элементов с учётом связанности термоэлектроупругих полей, что позволяет наиболее точно установить общие закономерности поведения электроупругих систем.

Степень разработанности темы диссертации. Основой для создания современной теории термоэлектроупругости послужили фундаментальные работы выдающихся учёных. К ним относятся труды В. Фойгта, У. Мэзона, Ю. В. Новожилова, В. З. Партона, В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко связанные с исследованием электроупругих тел, а также публикации в области теплопроводности Ф. Неймана, Дж. Дюгамеля, Г. Лорда, Ю. Шульмана, А. Грина, П. Нахди и других. Обобщением данных исследований, позволившим сформулировать общую теорию связанности термоэлектроупругих полей, являются работы Р. Д. Миндлина и В. Новацкого.

К числу учёных, внёсших значительный вклад в решение прикладных задач термоэлектроупругости, относятся Ватульян А. О., Нестеров С. А., Паньков А. А., Калоеров С. А., Белоконов А. В., Наседкин А. В., Соловьев А. Н., Qin H. Q., Куликов Г.М., Xiang H. J., Shi Z. F., Alshaikh F., Bassiouny E., Huang J., Chen W., Nassar M. E., Shioya T., Wu X.-H., Y.-P. Shen, Zhong X., Zhang K., Varelis D., Saravanos D. A., Lee H. J., Branco P. J. C., Dente J. A., Nourmohammadi H., Behjat B. и другие.

Целью диссертационной работы является разработка нового теоретического подхода по решению краевых задач для круглых пьезокерамических пластин в трёхмерной постановке, с учётом связанности термоэлектроупругих полей в случае действия внешней нестационарной осесимметричной температурной нагрузки, а также проведение качественного и количественного анализа нестационарных процессов в однослойных и многослойных электроупругих системах.

Для реализации поставленной цели были сформулированы и построены решения краевых задач в связанной и несвязанной постановке для круглых сплошных пьезокерамических пластин.

Научная новизна диссертационной работы заключается в построении алгоритмов замкнутых решений нестационарных задач для сплошных круглых электроупругих пластин, выполненных полностью из пьезокерамического материала и содержащих пьезокерамический слой (многослойная система). Полученные расчётные соотношения позволяют описать работу рассматриваемых элементов и уточнить их конструктивное решение при проектировании систем со встроенными пьезокерамическими тепловыми преобразователями различного назначения.

В работе получены следующие новые научные результаты, при использовании классической теории термоэлектроупругости, для элементов, выполненных полностью, либо с применением аксиально поляризованных пьезокерамических материалов:

1. Построено новое замкнутое решение динамической осесимметричной задачи в несвязанной постановке для анизотропного жёсткозакреплённого элемента, при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го рода;

2. Построены новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач применительно к анизотропным однородным сплошным электроупругим системам без учёта их инерционных характеристик при различных способах закрепления (шарнирном и жёстком) и удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода;

3. Разработан алгоритм расчёта связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглого шарнирно закреплённого многослойного элемента, состоящего из упругих и электроупругих слоёв;

4. Выполнен количественный и качественный анализ связанности температурных, электрических и упругих полей на основании полученных новых численных результатов.

Теоретическая значимость работы определяется возможностью описания и анализа связанных термоэлектроупругих полей в круглых сплошных пластинах при их различном закреплении, выполненных из пьезокерамических материалов, либо содержащих один из таких слоёв, в случае неравномерного осесимметричного нестационарного температурного воздействия. Результаты научного исследования позволяют установить зависимость между внешним тепловым воздействием и индуцируемым электрическим импульсом.

Практическая значимость работы связана с разработкой программного комплекса, созданного на основе полученных аналитических решений, который является удобным и быстрым инструментом для проведения расчётов и направлен на сокращение затраченного времени и ресурсов, необходимых для проектирования измерительных и контрольных устройств.

Полученные расчётные соотношения, реализованные в автоматизированном программном обеспечении, используются при решении инженерных задач проектными структурами ООО «СМР-Проект». Кроме того, результаты диссертационной работы применяются при подготовке магистров по направлению подготовки «Строительство» профиля «Теория сооружений» Самарского государственного технического университета. Результаты внедрения проведённого исследования подтверждены соответствующими актами.

Методы исследования. При решении соответствующих линейных краевых задач применяются конечные интегральные преобразования, которые являются наиболее общей формой метода разделения переменных, позволяющие построить новые замкнутые решения. Полученные расчётные соотношения реализованы с помощью программного комплекса в системе автоматизации математических расчётов Mathcad-15.0.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглой сплошной пьезокерамической пластины при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го рода;

2. Новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач для круглой сплошной пьезокерамической пластины при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода, без учёта их инерционных характеристик;

3. Новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для круглой многослойной пластины без учёта сил инерции;

4. Анализ новых численных результатов, полученных при решении задач по определению термоэлектроупругих полей в круглых однослойных и многослойных пластинах.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгостью математической постановки, в рамках сформулированных допущений, и методами решения рассматриваемых нестационарных задач термоэлектроупругости, совпадением в частных случаях представленных решений с известными численными результатами, а также с физической картиной исследуемых процессов.

Апробация результатов исследования. Полученные в диссертационной работе результаты были представлены и обсуждены на: XIII Международной научн. техн. конф. «Актуальные вопросы науки и практики» (г. Уфа, 2023 год); 79 – 82-й Всероссийских научн. техн. конф. «Традиции и инновации в строительстве и архитектуре» (СамГТУ, г. Самара, 2022 – 2025 г.); Международной научн. конф. «Актуальные проблемы прикл. математики, информ. и механики» (ВГТУ, г. Воронеж, 2022 г., 2024 г.); XII Всероссийской научн. конф. с международным участием «Мат. моделирование и краевые задачи» (СамГТУ, г. Самара, 2024 г.); IX Всерос. научн. техн. конф. памяти Т.А. Исмаилова «Состояние и перспективы развития термоэлектрического приборостроения» (ДГТУ, г. Махачкала, 2024 г.); XX Всерос. научн. техн. конф. «Приборостроение в XXI веке. Интеграция науки, образования и производства» (ИГТУ им. М.Т. Калашникова), г. Ижевск, 2024 г.).

В полном объёме работа представлялась на семинарах кафедр «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты» (зав. кафедрой д.т.н., проф. Д. А. Шляхин), «Прикладная математика и информатика» (зав. кафедрой д. ф. – м. н., проф. В. П. Радченко) Самарского государственного технического университета, на семинаре кафедры «Математическое моделирование в механике» (зав. кафедрой д.ф. – м.н. Л. В. Степанова) Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва.

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 13 изданиях, среди которых 4 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК.

Личный вклад автора. Работы [8, 9, 11–13] выполнены автором самостоятельно. Постановка задач, построение замкнутых решений, разработка программного комплекса и анализ полученных результатов в работах [1 –7, 10] диссертантом проводилась совместно с соавторами.

Объем и структура диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка используемой литературы и приложений. Общий объем работы 174 страницы машинописного текста, который включает 86 иллюстраций, 1 таблицу. Список литературы содержит 223 источника.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы, излагается её научная новизна и практическая значимость результатов, а также представлено общее содержание диссертационной работы.

В первой главе в подразделе 1.1. представлен анализ существующих работ, связанных с разработкой основных теорий и путей решения начально–краевых задач термоупругости, электроупругости и термоэлектроупругости.

В подразделе 1.2. анализируются принципы работы преобразователей, в которых входной информацией является температура, а в качестве выходного параметра используется деформация пьезокерамической пластины, генерируемая в электрический сигнал (разность потенциалов, напряжение). Анализ работы данных преобразователей позволяет сделать вывод о необходимости совершенствования аналитических расчётов с учётом связанности полей, которые позволят повысить эксплуатационные характеристики современных тепловых датчиков.

Проведённый анализ позволил сделать вывод об актуальности диссертационной работы.

Во второй главе исследуется динамическая осесимметричная задача для круглой сплошной однослойной пластины, занимающей в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область Ω : $\{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$, с жёстким закреплением её цилиндрической поверхности. Нагрузка на лицевых электродированных поверхностях пластины задаётся в виде функций изменения температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$, $\omega_2^*(r_*, t_*)$, а их подключение к измерительному прибору позволяет определить разность потенциалов $V(t_*)$ при заземлении нижней плоскости пластины. Расчётная схема задачи показана на рис. 1.

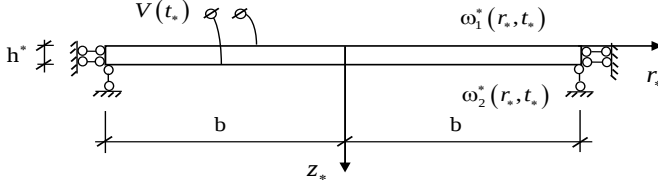


Рисунок 1 - Расчётная схема для круглой жёсткозакреплённой пластины, исследуемой в главе 2

Математическая формулировка задачи включает систему дифференциальных уравнений для аксиально поляризованного пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решёткой бтм и краевые условия в безразмерной форме:

$$\frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[a_{14} \Theta + a_{15} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{16} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0;$$

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \quad \{U, \partial W / \partial r, \partial \Theta / \partial r\}_{|r=1} = 0, \quad (2)$$

$$\{-\partial \phi / \partial r + a_{10} (\partial W / \partial r + \partial U / \partial z) + a_{12} \Theta\}_{|r=1} = 0;$$

$$z = 0, h \quad a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\phi_{|z=0} = \phi_0, \quad \phi_{|z=h} = 0, \quad \Theta_{|z=0} = \omega_1, \quad \Theta_{|z=h} = \omega_2;$$

$$t = 0 \quad \{U, W, \phi, \Theta\} = 0, \quad \frac{\partial \{U, W\}}{\partial t}|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

где $\{U, W, r, z, h\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h^*\} / b$, $\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = \gamma_{11} C_{11}^{-1} [\{T^*, \omega_1^*, \omega_2^*\} - T_0]$,

$$\{\phi, \phi_0\} = \frac{e_{31}}{C_{11} b} \{\phi^*, \phi_0^*\}, \quad t = \frac{t_*}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad \{a_1, a_2, a_4, a_{17}\} = \{C_{55}, (C_{13} + C_{55}), C_{33}, C_{13}\} C_{11}^{-1},$$

$$\{a_3, a_5, a_6\} = \frac{\{(e_{15} + e_{31}), e_{15}, e_{33}\}}{e_{31}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, \quad a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}}, \quad a_{12} = \frac{g_{11} e_{31}}{\gamma_{11} \varepsilon_{11}},$$

$$\{a_9, a_{10}\} = \frac{e_{31} \{(e_{15} + e_{31}), e_{15}\}}{C_{11} \varepsilon_{11}}, \quad a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}}, \quad a_{14} = k \frac{b}{\Lambda} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}, \quad a_{15} = T_0 \frac{b \gamma_{11} \gamma_{33}}{\Lambda \sqrt{C_{11} \rho}},$$

$$a_{16} = T_0 b \frac{g_{33}\gamma_{11}}{a_{31}\Lambda} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}; \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, U^*, W^*, \phi^*, T^* - \text{компоненты вектора}$$

перемещений, потенциал электрического поля и температура в размерной форме; t_* – время; T_0 – температура первоначального состояния тела; $C_{ms}, e_{ms}, \varepsilon_{ss}, \gamma_{ss}, g_{ss}$ – модули упругости, пьезомодули, коэффициенты диэлектрической проницаемости, компоненты температурных напряжений и пироккоэффициентов ($m, s = \overline{1, 5}$); Λ, k, α_t – коэффициенты теплопроводности, объёмной теплоёмкости и линейного температурного расширения.

Для определения потенциала $\phi_0^*(r, t)$, индуцируемого на верхней лицевой поверхности, в случае подключения электродов к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, используется дополнительное условие:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} D_{z|z=0} dS = 0, \quad (5)$$

где D_z – аксиальная компонента индукции электрического поля, S – площадь поверхности электрода.

Проблема вычисления общего интеграла системы (1) с несамосопряжённым дифференциальным оператором приводит к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается уравнение теплопроводности (последнее равенство (1)) с соответствующими краевыми условиями (2) – (4). Общее решение данной задачи имеет вид¹:

$$\Theta(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H(z, t) + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} L_H(n, m, t) \sin(\lambda_{nm} z) \right], \quad (6)$$

где L_H – трансформанта Фурье, H – функция, позволяющая привести неоднородные условия (3) к однородным, j_n, λ_{nm} – собственные значения ($n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, 3, \dots$).

На втором этапе решается связанная задача электроупругости (первые три равенства (1)) с соответствующими условиями (2) – (4) при последовательном использовании интегрального преобразования Ханкеля по r и обобщённого конечного преобразования по z .

Для выполнения условия закрепления пластины в вертикальной

¹ Шляхин Д. А. Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жёсткозакреплённой круглой пластины// Инженерный журнал: наука и инновации. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. -№5 (77). - С. 1-18.

плоскости ($W(1, h, t) = 0$) вводится дополнительная функция $W_1(t)$, которая определяется в процессе решения задачи.

Последовательное использование алгоритмов соответствующих интегральных преобразований позволяет получить выражения для функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t)$:

$$\begin{aligned} U(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{K_1(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right], \\ W(r, z, t) &= W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{K_2(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right], \\ \phi(r, z, t) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{K_3(\lambda_{in}, z)}{\|K_{in}\|^2} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где $G, K_1 \dots K_3, \|K_{in}\|$ – трансформанта, компоненты вектор-функции преобразований и нормирующий множитель метода КИП, $H_1 \dots H_3$ – стандартизирующие функции, j_n, λ_{in} – собственные значения.

В качестве примера рассматривается пластина ($\{b, h^*\} = \{14, 1.5\} \times 10^{-3}$ м), изготовленная из пьезокерамики состава PZT-4, в случае изменения температуры на её лицевых поверхностях по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \omega_1^*(r_*, t_*) &= \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \\ (\omega_2^*(r_*, t_*) &= 0), \end{aligned} \quad (8)$$

где $H(\dots)$ – функция Хэвисайда, $T_{\max}, t_{\max}^*$ – максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время ($T_{\max} = 373$ K (100° C), $T_0 = 293$ K (20° C), $t_{\max}^* = 0.2$ с).

Характер деформирования жёсткозакреплённой пластины показывает, что для определения величины электрического импульса $V(t)$ наиболее эффективно сформировать на её верхней лицевой поверхности два электрода с радиусом раздела R и подключением их к измерительному прибору. В этом случае разность потенциалов определяется выражением $V(t) = \phi_0(t)_{|-R} - \phi_0(t)_{|+R}$. На рисунке 2, в безразмерной форме, приведены графики изменения $V(t)$ по времени, подтверждающие данный вывод. Сплошной линией обозначена зависимость в случае размещения двух электродов с радиусом раздела

$R = 0.6$, пунктирной – подключение к измерительному прибору верхней и нижней (заземлённой) сплошных электродированных поверхностей.

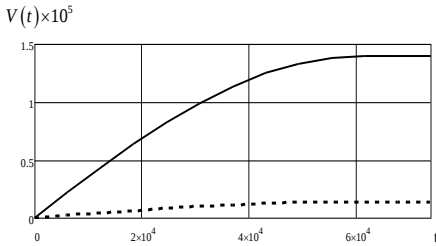


Рисунок 2 – Графики зависимости разности потенциалов $V(t)$ от времени t при различном закреплении

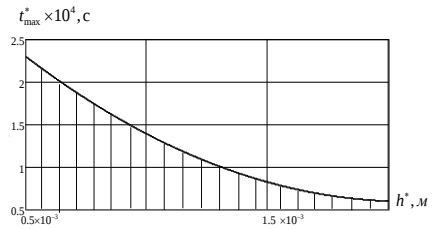


Рисунок 3 – График зависимости времени температурного воздействия t_{max}^* от толщины пластины h^*

Решение динамической задачи электроупругости позволяет получить зависимость, представленную на рисунке 3, между предельным значением времени t_{max}^* и толщиной пластины h^* , когда силами инерции при решении можно пренебречь (незаштрихованная часть графика).

В третьей главе исследуется связанная задача термоэлектроупругости (1) – (5) для жёсткозакреплённой пьезокерамической пластины, при удовлетворении на нижней лицевой поверхности граничного условия теплопроводности 3-го рода. Учёт ограничений по толщине пластины и скорости изменения температурной нагрузки позволяет использовать в соотношениях (1) уравнения равновесия. В этом случае постоянные $a_{14}...a_{16}$ принимают вид: $a_{14} = 1$, $a_{15} = T_0 \gamma_{11} \gamma_{33} (C_{11} k)^{-1}$, $a_{16} = T_0 g_{33} \gamma_{11} (e_{31} k)^{-1}$, безразмерное время определяется равенством $t = \Lambda (k b^2)^{-1} t_*$, а последнее равенство (3) заменяется на условие конвективного теплообмена поверхности с окружающей средой: $(\partial \Theta / \partial z + a_{17} \Theta)_{|z=h} = a_{17} \vartheta$ ($a_{17} = \alpha b \Lambda^{-1}$, α – коэффициент теплоотдачи).

Задача решается путём последовательного использования интегрального преобразования Ханкеля по r и вырожденного обобщённого биортогонального конечного преобразования по z .

Особенность построенного решения заключается в том, что к краевой задаче относительно трансформант Ханкеля U_H, W_H, φ_H, Q_H применяется вырожденное биортогональное интегральное преобразование при использовании следующей трансформанты и формул обращения:

$$G(n, \lambda_{in}, t) = \int_0^h \left[Q_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz, \quad (9)$$

$$\{U_H, W_H, \varphi_H, Q_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z), N_4(\mu_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2},$$

где λ_{in}, μ_{in} – собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряжённых $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент вектор-функций ядер КИП ($k = 1..4$).

При использовании алгоритма преобразования получается счётное множество задач для трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$:

$$\frac{dG(n, \lambda_{in}, t)}{dt} + \lambda_{in} G(n, \lambda_{in}, t) = -F_H(n, \lambda_{in}, t), \quad (10)$$

$$t = 0 \quad G(n, \lambda_{in}, 0) = G_{0H}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, 3, \dots),$$

решение которых имеет вид:

$$G_{in} = G_{0H} \exp(-\lambda_{in} t) + \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_{in}(\tau - t) d\tau, \quad (11)$$

а также однородные краевые задачи относительно неизвестных компонент ядра преобразований $K_1(\lambda_{in}, z) \dots K_4(\lambda_{in}, z)$:

$$\begin{aligned} -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} - a_9 j_n \frac{dK_{3in}}{dz} + \lambda_{in}^2 a_{15} j_n K_{4in} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 K_{2in} + a_4 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 K_{3in} + a_{11} \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - \lambda_{in}^2 a_{15} \frac{dK_{4in}}{dz} &= 0, \\ j_n^2 K_{3in} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - a_3 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{2in} + a_6 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + \lambda_{in}^2 a_{16} \frac{dK_{4in}}{dz} &= 0, \\ (\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_{4in} + \frac{d^2 K_{4in}}{dz^2} + j_n K_{1in} + a_7 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{12} j_n K_{3in} - a_{13} \frac{dK_{3in}}{dz} &= 0; \\ z = 0, h \quad a_{17} j_n K_{1in} + a_4 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{11} \frac{dK_{3in}}{dz} - \lambda_{in}^2 a_{16} K_{4in} &= 0, \quad K_{3in}|_{z=0, h} = 0, \\ \frac{dK_{1in}}{dz} - j_n K_{2in} &= 0, \quad K_{4in}|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{dK_{4in}}{dz} + a_{18} K_{4in} \right)_{|z=h} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

и $N_1(\mu_{in}, z) \dots N_4(\mu_{in}, z)$:

$$-j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + a_3 j_n \frac{dN_{3in}}{dz} + j_n N_{4in} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 j_n^2 N_{2in} + a_4 \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 N_{3in} + a_6 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} - a_7 \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\
& j_n^2 N_{3in} - a_8 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + a_9 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 N_{2in} + a_{11} \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_{12} j_n N_{4in} + a_{13} \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\
& -j_n^2 N_{4in} + \frac{d^2 N_{4in}}{dz^2} + \mu_{in}^2 \left(N_{4in} + a_{15} j_n N_{1in} + a_{15} \frac{dN_{2in}}{dz} - a_{16} \frac{dN_{3in}}{dz} \right) = 0, \\
& z = 0, h \quad a_{17} j_n N_{1in} + a_4 \frac{dN_{2in}}{dz} + a_6 \frac{dN_{3in}}{dz} - a_7 N_{4in} = 0, \quad N_{3in|z=0,h} = 0, \\
& \frac{dN_{1in}}{dz} - j_n N_{2in} = 0, \quad N_{4in|z=0} = 0, \quad \left(\frac{dN_{4in}}{dz} + a_{18} N_{4in} \right)_{z=h} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

где F_H, G_{0H} – трансформанты нагрузки и начального условия.

Окончательные выражения функций $U(r, z, t), W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)$ получим, применяя к трансформанте (11) последовательно формулы обращения (9) и Ханкеля:

$$\begin{aligned}
U(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\
W(r, z, t) &= W_1(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\
\phi(r, z, t) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \\
\Theta(r, z, t) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].
\end{aligned} \tag{16}$$

В качестве примера рассматривается случай действия на поверхности ($z_* = 0$) пластины ($\{b, h^*\} = \{14, 1.5\} \times 10^{-3}$ м, с радиусом разделения $R = 0.6$) нагрузки (8).

На рисунке 4 представлены графики изменения приращения температуры $\Theta^*(0, z, t)$ ($\Theta^* = T^* - T_0$) по относительной толщине пластины в различные моменты времени ($t_{\max}^* = 0.1$ с, $\alpha = 5.6$ Вт/(м² К)): $1 - t = t_{\max}$, $2 - t = 10t_{\max}$, $3 - t = 100t_{\max}$).

На рисунке 5 в безразмерном виде приведены графики перемещений $W(0, 0, t)$ по времени t . Сплошной и пунктирной линией соответственно обозначены результаты при подключении образца к измерительному прибору и при короткозамкнутых электродированных поверхностях ($\phi_{|z=0,h} = 0$). Полученные результаты позволяют сделать

выводы, что короткое замыкание электродов приводит к образованию более жёсткой системы и, как следствие, уменьшению перемещений.

$\Theta^*(0, z, t), ^\circ C$

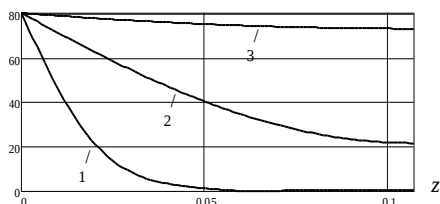


Рисунок 4 – Графики приращения температуры по относительной толщине " $\Theta^*(0, z, t) - t$ "

$W(0, 0, t) \times 10^4$

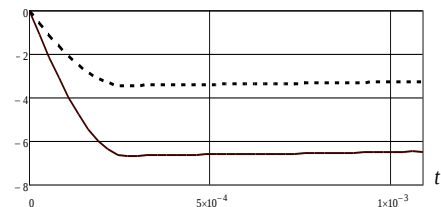


Рисунок 5 – Графики перемещений в зависимости от времени " $W(0, 0, t) - t$ "

Численные результаты связанной задачи показывают, что при исследовании пьезокерамических элементов влиянием скорости изменения объёма тела на температурное поле можно пренебречь. Основное преимущество построенного алгоритма заключается в том, что в отличие от несвязанной постановки отпадает необходимость аппроксимации функции температуры при решении задачи электроупругости.

В четвертой главе рассматривается задача, аналогичная предыдущей (глава 3), но при шарнирном закреплении цилиндрической поверхности пластины. В этом случае граничные условия (2) принимают вид:

$$r = 0, 1 \quad \{U, W, \phi, \Theta\}_{|r=0} < \infty, \quad \{W, \phi\}_{|r=1} = 0, \quad \Theta_{|r=1} = \omega_3, \quad (17)$$

$$(\partial U / \partial r + a_{18} U + a_{16} \partial W / \partial z + \partial \phi / \partial z - \Theta)_{|r=1} = 0, \quad a_{18} = C_{12} C_{11}^{-1},$$

где ω_3 – изменение температуры на цилиндрической поверхности.

Для шарнирно закреплённой пластины на её верхней лицевой поверхности формируется сплошное электродное покрытие.

Общее решение данной задачи также строится методами преобразования Ханкеля и биортогонального КИП. Окончательные выражения для $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$, $\Theta(r, z, t)$ имеют вид:

$$U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (18)$$

$$W(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_1(j_n)^2} \left[H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

На рисунке 6 показаны графики изменения перемещений $W(0, z, t)$ для безразмерных моментов времени: $1: t = t_{\max}$, $2: t = 10t_{\max}$, $3: t = 100t_{\max}$.

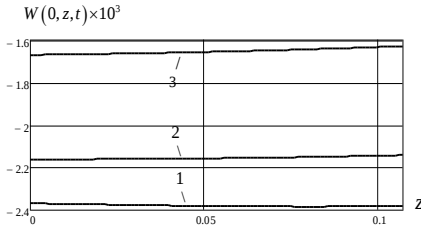


Рисунок 6 – Перемещения " $W(0, z, t) - z$ "

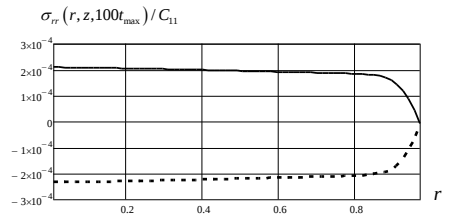


Рисунок 7 – Графики " $\sigma_{rr}(r, z, 100t_{\max}) - r$ "

На рисунке 7 представлены графики изменения напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по безразмерной радиальной координате при установившемся температурном режиме $t = 100t_{\max}$. Сплошная линия – $z = 0$, пунктирная – $z = h$.

Здесь можно отметить, что в начальный момент времени при «тепловом ударе» ($t_{\max}^* = 0.2$ с) наблюдаются максимальные перемещения. В дальнейшем в процессе прогрева элемента $W(0, z, t)$ уменьшаются. При шарнирном закреплении, за счёт теплового расширения, пластина изгибается и на её верхней поверхности наблюдаются растягивающие, а на нижней плоскости – сжимающие напряжения.

Численные результаты аналитического расчёта сравниваются с данными, полученными численным методом с помощью программного комплекса ANSYS. Анализ показывает их достаточно точное совпадение при установившемся температурном режиме. Однако, при исследовании нестационарных процессов использование метода конечных элементов приводит к существенной ошибке. Это объясняется тем, что при определении деформированного состояния пластины численным методом, в отличие от рассматриваемой связанной задачи, не учитывается скорость распространения температурного поля в электроупругой системе. Здесь в качестве практического применения

полученных замкнутых решений можно отметить возможность их использования в виде тестовых при корректировке матриц жёсткости конечных элементов.

В пятой главе рассматривается связанная нестационарная задача для шарнирно закреплённой многослойной пластины. Разработанный алгоритм справедлив для произвольного числа слоёв, однако для определённости решения принимаем систему трёхслойной, в которой центральный слой выполнен из пьезокерамического материала с подключением его электродированных поверхностей к измерительному прибору (рис. 8).

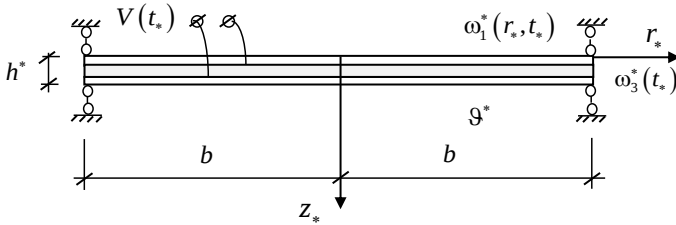


Рисунок 8 – Расчётная схема для круглой шарнирно закреплённой многослойной пластины, исследуемой в главе 5

В задаче используются дополнительные граничные условия совместности перемещений, температуры, напряжений, идеального теплового контакта на поверхности жёсткого соединения слоёв. Общее решение данной задачи строится методами разделения переменных и выражения для $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$, $\Theta(r, z, t)$ аналогичны (18).

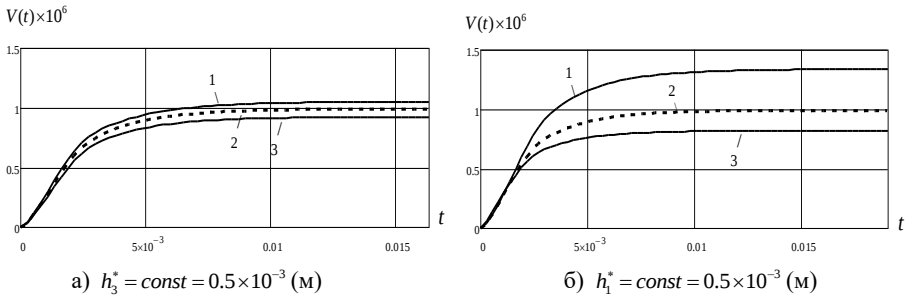


Рисунок 9 – Графики зависимости разности потенциалов $V(t)$ от времени t

На рисунке 9 представлены в безразмерной форме графики изменения разности потенциалов $V(t)$ по времени при использовании пьезокерамического слоя толщиной $h_2^* = 10^{-3} \text{ (м)}$ и различной толщине слоя из стали, и теплоизолирующего слоя (соответственно верхний и

нижний слой на рисунке 8). Позициями 1, 2, 3 обозначены результаты, полученные при высоте слоя $h_j^* = \{1, 0.5, 0.25\} \times 10^{-3}$ (м) ($j = 1, 3$).

Результаты решения задачи показывают, что при постоянной толщине слоя из теплоизолирующего материала увеличение толщины стального слоя h_1^* приводит к повышению амплитудных значений разности потенциалов $V(t)$ (рис.9, а), вследствие роста относительных деформации $\partial W / \partial z$ элемента. Аналогичная ситуация наблюдается при $h_1^* = \text{const}$ и увеличению толщины теплоизолирующего слоя (рис.9, б). Это объясняется повышением температуры в пьезокерамическом слое, что также приводит к росту перемещений.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Построено новое замкнутое решение несвязанной динамической осесимметричной задачи термоэлектроупругости для сплошной однослойной жёсткозакреплённой круглой пластины, выполненной из пьезокерамического материала, которое позволяет определить напряжённо–деформированное состояние и температурное поле без учёта скорости изменения объёма упругой системы, а также определить геометрические размеры конструкции, при которых необходимо учитывать её инерционные характеристики;

2. Разработаны новые замкнутые решения связанных нестационарных осесимметричных задач термоэлектроупругости в трёхмерной постановке для круглых пьезокерамических шарнирно и жёсткозакреплённых пластин без учёта сил инерции при выполнении граничных условий теплопроводности 1–го и 3–го рода;

3. Получено замкнутого решения связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости в трёхмерной постановке для многослойной круглой сплошной пластины с внутренним пьезокерамическим слоем, без учёта сил инерции и при выполнении граничных условий 1–го и 3–го рода;

4. Разработано программное обеспечение в системе Mathcad – 15, позволяющее проводить анализ связанных и несвязанных термоэлектроупругих процессов в однослойных и многослойных круглых пластинах, что даёт возможность определить геометрические размеры элемента, состав пьезокерамического материала, размеры электродного покрытия, при которых удаётся наиболее эффективно преобразовать заданное внешнее температурное воздействие в электрический сигнал;

5. Построенные математические модели и разработанные алгоритмы решения краевых задач применяются специалистами ООО «СМР-Проект», ООО «Энергоресурс», ООО «СЛЭНАКС» при проектировании и разработке систем со встроенными преобразователями температуры, в которых чувствительными элементами являются пьезокерамические круглые сплошные пластины. Кроме того, результаты диссертационной работы используются при подготовке магистров по направлению подготовки «Строительство» профиля «Теория сооружений» Самарского государственного технического университета.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. Шляхин, Д. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для круглой жёстко закреплённой пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова, В. А. Юрин // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2022. – № 1(50). – С. 3-16. (ВАК, K2).

2. Шляхин, Д. А. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой пьезокерамической шарнирно закреплённой пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2023. – Т. 27, № 1. – С. 159-178 (ВАК, K1, RSCI).

3. Шляхин, Д. А. Связанная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой жёстко закреплённой пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2024. – Т. 24, № 1. – С. 23-35 (ВАК, K2, Scopus).

4. Шляхин, Д. А. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой многослойной пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2025. – № 3(780). – С. 16-29 (ВАК, K1, RSCI).

Публикации в материалах конференций и других изданиях:

5. Шляхин, Д. А. Динамическая несвязанная задача термоэлектроупругости для круглых пластин / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Традиц. и инновац. в стр-ве и архитектуре. Стр-во и строит. технологии: 79-й всерос. НТК, – Самара: СамГТУ, 2022. – С. 855-860.

6. Шляхин, Д. А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для круглой пластины / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Актуальн. проблемы прикл. математики, информ. и механики: труды Междунар. НК, – Воронеж, 2022. – С. 1374-1379.

7. Шляхин, Д. А. Решение динамической задачи термоэлектроупругости для круглой пластины методом конечных интегральных преобразований / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Традиц. и инновац. в стр-ве и архитектуре. Стр-во и строит. технологии: 80-й всерос. НТК, – Самара: СамГТУ, 2023. – С. 799-807.

8. Савинова, Е. В. Влияние температурных полей в задаче термоэлектроупругости для круглой жёсткозакреплённой пластины / Е. В. Савинова // Фундамент. и прикладные аспекты развития современ. науки: материалы XV Междунар. конкурса НИР. – Уфа, 2023. – С. 46-53.

9. Савинова, Е. В. Оценка влияния связности температурных и упругих полей на напряженно-деформированное состояние круглой жёстко закреплённой пластины / Е. В. Савинова // Актуальные вопросы науки и практики: Сборник статей по материалам XIII Международной научно-практической конференции, – Уфа, 2023. – С. 61– 69.

10. Шляхин, Д. А. Исследование для пластины из пьезокерамического материала задачи термоэлектроупругости / Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова // Традиц. и инновац. в стр-ве и архитектуре. Стр-во и строит. технологии: 81-й всерос. НТК, – Самара: СамГТУ, 2024. – С. 818-824.

11. Савинова, Е. В. Задача термоэлектроупругости в динамической постановке для плоского твердого тела малой толщины / Е. В. Савинова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, – Воронеж, 2024. – С. 1170 – 1175.

12. Савинова, Е. В. Исследование несвязанных термоэлектроупругих полей в жёсткозакреплённой круглой пластине / Е. В. Савинова // Мат. моделир. и краевые задачи: материалы XII Всерос. научной конференц. с междунар. участием. – Самара: СамГТУ, 2024. – С. 89 – 94.

13. Савинова, Е. В. Исследование связанных термоэлектроупругих полей в шарнирно закреплённой круглой пластине / Е. В. Савинова // Мат. моделир. и краевые задачи: материалы XII Всерос. научной конференц. с междунар. участием. – Самара: СамГТУ, 2024. – С. 95-100.

Автореферат отпечатан с разрешения объединённого
диссертационного совета 99.2.039.02
на базе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический
университет» и ФГАОУ ВО «Самарский национальный
исследовательский университет имени С.П. Королёва»
(протокол № 8 от «02» июля 2025 г.)

Заказ № 180. Тираж 100 экз. Форм. лист. 60×84/16.
Отпечатано на ризографе.